IMECC/UNICAMP
MA211 - Cálculo II
Coordenador: João Vitor da Silva
Prova P1 - Tarde
04 de Setembro de 2025 - 5ª-feira - 16:00hs às 18:00hs

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	3	2	3	2	10
Nota:					

Leia com atenção - Instruções para a realização de sua prova:

1. Usar (somente) caneta **Azul/Preta**, ou lapisera de cor escura - Não desgrampear a prova!
2. **Desliguem/Guardem** os **celulares e relógios** (Smart Watch);
3. Não é permitido sair da sala de aula durante a realização da prova;
4. Não é permitida a utilização de folhas (A4, caderno e etc) extras.
5. É vedada a utilização de qualquer material/dispositivo de apoio extra.
6. Esta prova terá início às 16:00hs e término às 18:00hs do dia 04 de setembro de 2025.
7. Você deverá escrever a resolução das questões de maneira clara e objetiva. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

As questões da prova estão na próxima folha.

Se necessário, utilize o verso desta página como rascunho.

Q1. Considere a função de duas variáveis $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + 3 & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ k^2+1 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) **(1 ponto)** Determine o valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que f seja **contínua** em $(0,0)$. Justifique.;

(b) **(1 ponto)** Calcule as **derivadas direcionais** de f em $(0,0)$ em qualquer direção unitária $\overrightarrow{u} = (a,b)$ com $\|\overrightarrow{u}\| = a^2+b^2 = 1$, isto é, $D_{\overrightarrow{u}}f(0,0)$, usando a definição.

(c) **(1 ponto)** A função f é **diferenciável** em $(0,0)$? Justifique usando um critério adequado de diferenciabilidade.

Solução:

(a). Continuidade em $(0,0)$

Para que f seja contínua em $(0,0)$ é necessário que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = k^2+1 \ \ (0,3 \text{ Pontos}).$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$: utilizando que $|\cos(t)| \leq 1$ e o Teorema de Confronto, tem-se

$$0 \leq |(x^2+y^2)\cos(1/(x^2+y^2))| \leq x^2+y^2 \to 0 \quad \text{quando } (x,y) \to (0,0).$$

Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\cos(1/(x^2+y^2)) = 0$ e desta forma

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0+3 = 3 \ \ (0,3 \text{ Pontos}).$$

Portanto, para continuidade:

$$k^2+1 = 3 \implies k^2 = 2 \implies k = \pm\sqrt{2} \ \ (0,4 \text{ Pontos}).$$

(b) Derivadas direcionais em $(0,0)$

A derivada direcional na direção unitária $\overrightarrow{u} = (a,b)$ é

$$D_{\overrightarrow{u}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+ta, 0+tb) - f(0,0)}{t}.$$

Para $(x,y) = (ta,tb)$, temos

$$f(ta,tb) - f(0,0) = (t^2(a^2+b^2))\cos\left(\frac{1}{t^2(a^2+b^2)}\right) + 3 - 3 = t^2 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) = t^2\cos(1/t^2),$$

já que $a^2+b^2 = 1$ (0,3 Pontos).

Então, pelo Teorema do Confronto, tem-se

$$\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} = t\cos\left(\frac{1}{t^2}\right) \to 0 \quad \text{quando } t \to 0 \ \ (0,3 \text{ Pontos}),$$

uma vez que
$$0 \le |t \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)| \le |t| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to 0.$$

Portanto, para qualquer direção unitária $\overrightarrow{u}$:

$$\boxed{D_{\overrightarrow{u}} f(0,0) = 0} \;\; (0,4 \text{ Pontos}).$$

(c) Diferenciabilidade em $(0,0)$:

A função f seria diferenciável se existisse um plano tangente com a seguinte aproximação linear:
$$f(x,y) - f(0,0) = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + o(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Como todas as derivadas parciais (e todas as derivadas direcionais) são zero, a aproximação linear seria
$$L(x,y) = 0 \;\; (0,3 \text{ Pontos}).$$

No entanto, considerando

$$\begin{aligned}
\frac{|f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) - 0|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} &= \frac{|((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\cos(1/((\Delta x)^2+(\Delta y)^2))|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \\
&= \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,|\cos(1/((\Delta x)^2+(\Delta y)^2))| \\
&\le \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}
\end{aligned}$$

essa expressão $\to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ (0,4 Pontos).

Portanto, o critério de diferenciabilidade é satisfeito, i.e.,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{|f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) - 0|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$$

e desta forma temos

$$\boxed{f \text{ é diferenciável em } (0,0)} \;\; (0,3 \text{ Pontos}).$$

Q2. **(2 pontos)** Determine a equação do plano que é tangente ao paraboloide $z = 2x^2 + 3y^2$ e paralelo ao plano $4x - 3y - z = 10$.

Solução:

1: Vetor normal do plano dado

O plano dado é:

$$4x - 3y - z = 10.$$

Seu vetor normal é:

$$\vec{n} = (4, -3, -1) \;\; (0,2 \text{ Pontos}).$$

2: Vetor normal ao paraboloide

O paraboloide é dado por:

$$z = 2x^2 + 3y^2.$$

Definindo a função:

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z = 0.$$

O gradiente de F é normal à superfície:

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (4x, 6y, -1).$$

Assim, o vetor normal à superfície no ponto (x_0, y_0, z_0) é:

$$\vec{n}_s = (4x_0, 6y_0, -1) \;\; (0,3 \text{ Pontos}).$$

3: Condição de paralelismo

Para que o plano tangente seja paralelo ao plano dado, seus vetores normais devem ser paralelos. Logo:

$$(4x_0, 6y_0, -1) = k(4, -3, -1), \quad \text{para algum } k \neq 0 \;\; (0,3 \text{ Pontos}).$$

4: Determinação de k e do ponto de tangência

Igualando as componentes:

$$\begin{cases} 4x_0 = 4k \\ 6y_0 = -3k \\ -1 = -k \end{cases}$$

Da terceira equação:

$$-1 = -k \implies k = 1.$$

Substituindo nas outras:

$$4x_0 = 4(1) \implies x_0 = 1,$$

$$6y_0 = -3(1) \implies y_0 = -\frac{1}{2}.$$

O ponto (x_0, y_0, z_0) pertence ao paraboloide:

$$z_0 = 2x_0^2 + 3y_0^2 = 2(1)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}.$$

Portanto, o ponto de tangência é:

$$\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right) \quad (0,6 \text{ Pontos}).$$

5: Equação do plano tangente

O vetor normal no ponto é:

$$\vec{n}_s = (4x_0, 6y_0, -1) = \left(4(1), 6\left(-\frac{1}{2}\right), -1\right) = (4, -3, -1).$$

A equação do plano tangente é:

$$4(x - x_0) - 3(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Substituindo $x_0 = 1$, $y_0 = -\frac{1}{2}$, $z_0 = \frac{11}{4}$:

$$4(x - 1) - 3\left(y + \frac{1}{2}\right) - \left(z - \frac{11}{4}\right) = 0.$$

Simplificando:

$$4x - 4 - 3y - \frac{3}{2} - z + \frac{11}{4} = 0.$$

Multiplicando todos os termos por 4 para eliminar denominadores:

$$16x - 16 - 12y - 6 - 4z + 11 = 0,$$

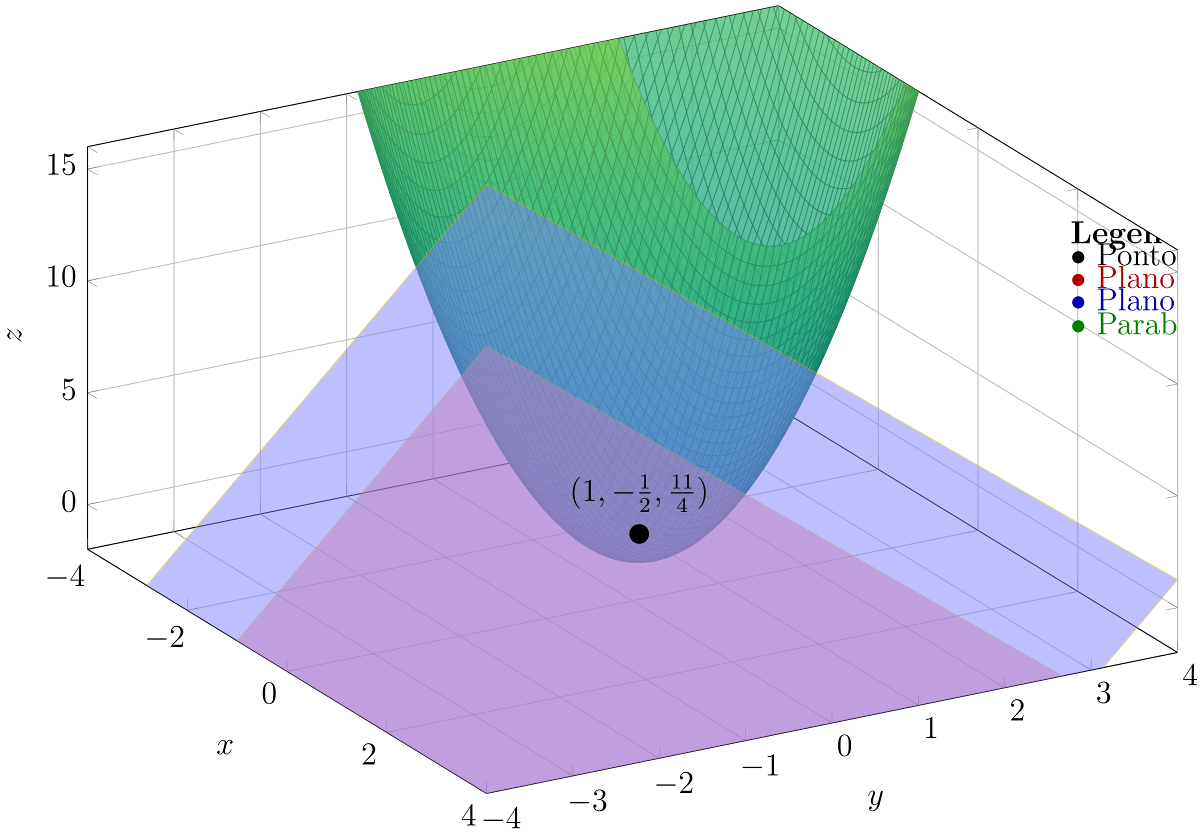
$$16x - 12y - 4z - 11 = 0.$$

Dividindo por 4:

$$4x - 3y - z - \frac{11}{4} = 0.$$

A equação do plano tangente é:

$$\boxed{4x - 3y - z = \frac{11}{4} \quad (0,6 \text{ Pontos}).}$$



15
10
5
0
z
-4
-2
0
2
4
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
y
$(1, -\frac{1}{2}, \frac{11}{4})$
Legen
Ponto
Plano
Plano
Parab

Q3. **(3 pontos)** Encontre e classifique os **pontos críticos** da função

$$f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$$

em máximos, mínimos locais ou de sela sobre o conjunto

$$\mathrm{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad -2 < y < 2\right\}$$

Solução:

1. Cálculo dos pontos críticos

A função é

$$f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y.$$

Calculamos o gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \big(5x^4 - 5,\ 5y^4 - 5\big) = 5\big(x^4 - 1,\ y^4 - 1\big) \ \ (0,2 \text{ Pontos}).$$

Os pontos críticos satisfazem $\nabla f(x,y) = (0,0)$, isto é

$$x^4 - 1 = 0, \qquad y^4 - 1 = 0 \ \ (0,4 \text{ Pontos}).$$

Daí $x^4 = 1$ e $y^4 = 1$, e, como procuramos pontos reais,

$$x = \pm 1, \qquad y = \pm 1 \ \ (0,4 \text{ Pontos}).$$

Logo, os pontos críticos (no plano) são as quatro combinações

$$\boxed{(1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1) \ \ (0,4 \text{ Pontos})}$$

Verificamos que todos esses pontos pertencem ao domínio solicitado

$$\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -\tfrac{3}{2} < x < \tfrac{3}{2},\ -2 < y < 2\},$$

pois ± 1 estão estritamente dentro dos intervalos dados. Portanto são pontos críticos interiores de D (0,1 Pontos).

2. Teste das segundas derivadas (Critério de Sylvestre)

As segundas derivadas são

$$f_{xx}(x,y) = 20x^3, \qquad f_{yy}(x,y) = 20y^3, \qquad f_{xy}(x,y) = 0.$$

A matriz Hessiana é diagonal:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 20x^3 & 0 \\ 0 & 20y^3 \end{pmatrix} \ \ (0,4 \text{ Pontos})$$

O discriminante do teste (determinante da Hessiana) é

$$D(x,y) = \det H_f(x,y) = (20x^3)(20y^3) = 400\, x^3 y^3 \ \ (0,3 \text{ Pontos})$$

Classificamos cada ponto:

- Em $(1,1)$: $f_{xx} = 20 > 0,\ D = 400 > 0 \Rightarrow H_f$ positiva definida $\Rightarrow$ **mínimo local**.

$$f(1,1) = 1 + 1 - 5 - 5 = -8.$$

- Em $(-1,-1)$: $f_{xx} = 20(-1)^3 = -20 < 0,\ D = 400 > 0 \Rightarrow H_f$ negativa definida $\Rightarrow$ **máximo local**.

$$f(-1,-1) = -1 - 1 + 5 + 5 = 8.$$

- Em $(1,-1)$: $x^3y^3 = (1)^3(-1)^3 = -1 \Rightarrow D = -400 < 0 \Rightarrow H_f$ indefinida $\Rightarrow$ **sela**.

$$f(1,-1) = 1 - 1 - 5 + 5 = 0.$$

- Em $(-1,1)$: similarmente $D = -400 < 0$ e temos **sela**.

$$f(-1,1) = -1 + 1 + 5 - 5 = 0.$$

Portanto a classificação final é:

$$\begin{aligned} (1,1):&\ \text{ponto de mínimo local},\quad f(1,1) = -8\ \ (0,2\ \text{Pontos}),\\ (-1,-1):&\ \text{ponto de máximo local},\quad f(-1,-1) = 8\ \ (0,2\ \text{Pontos}),\\ (1,-1),\ (-1,1):&\ \text{ponto de sela},\quad f = 0\ \ (0,4\ \text{Pontos}). \end{aligned}$$

3. Gráfico 3D de f com os pontos críticos marcados

A figura abaixo apresenta a superfície $z = f(x,y)$ num retângulo que contém D (fechado para efeito de plot), e marca explicitamente os quatro pontos críticos com cores e rótulos.

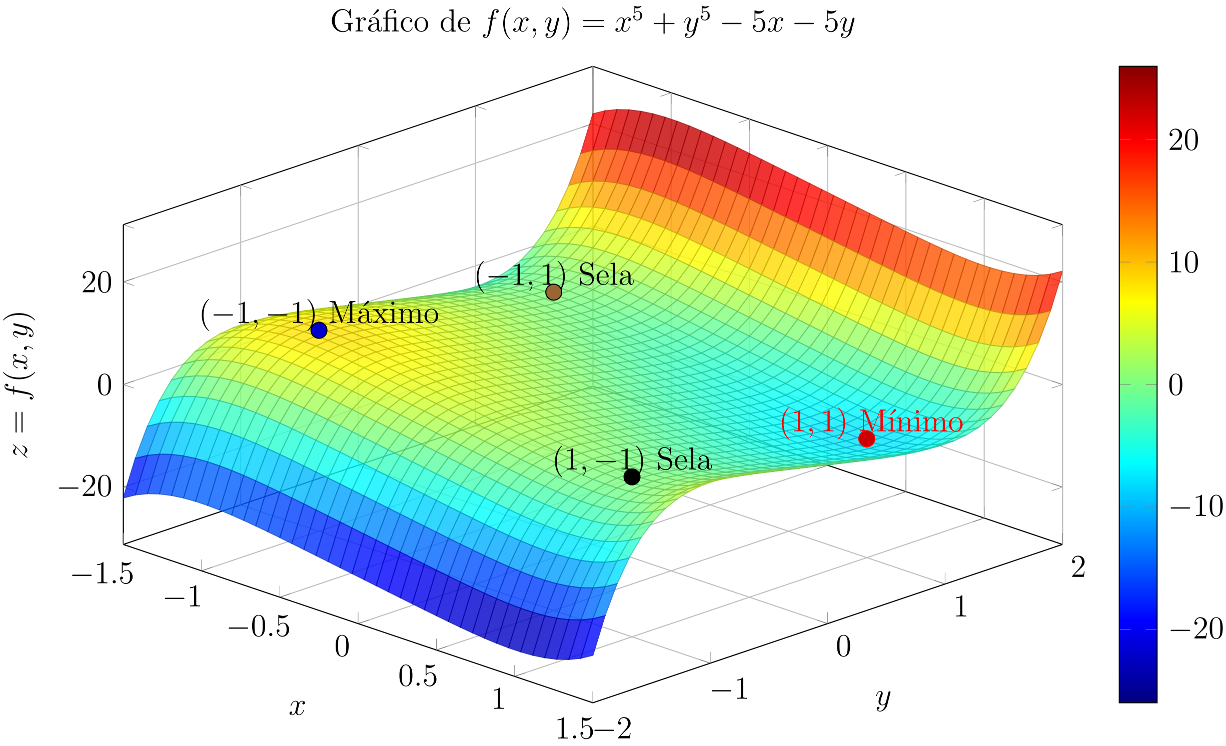


Figura: Superfície $z = f(x,y) = x^5+y^5-5x-5y$ e pontos críticos marcados: azul = mínimo local em $(1,1)$, vermelho = máximo local em $(-1,-1)$, teal = selas em $(1,-1)$ e $(-1,1)$.

Observação final: como os pontos críticos encontrados estão todos no interior de D, as conclusões acima sobre mínimos/máximos locais e pontos de sela são válidas para D.

Q4. **(2 pontos)** Utilizando **Multiplicadores de Lagrange** encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos e mais distantes da origem.

Solução:

A distância entre um ponto (x, y) e a origem $(0, 0)$ é

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \ \ (0,2 \text{ Pontos})$$

Mas a álgebra fica mais simples se maximizarmos e minimizarmos o **quadrado da distância**:

$$d^2 = f(x, y) = x^2 + y^2.$$

De fato, dado que a função d é não-negativa tem-se que

$$d_{\text{Máx}} = d(x_{\text{Máx}}, y_{\text{Máx}}) \geq d(x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad d^2_{\text{Máx}} = d^2(x_{\text{Máx}}, y_{\text{Máx}}) \geq d^2(x, y)$$

Assim, pelo **Teorema de Weierstrass** ou **Teorema dos valores extremos**, a função d^2 atinge seus valores máximos e mínimos em seu domínio de definição, pois d^2 é contínua e seu domínio é compacto.

A restrição é que os pontos pertencem a uma elipse, ou seja,

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 3 \ \ (0,2 \text{ Pontos})$$

De acordo com os multiplicadores de Lagrange, resolvemos

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{e} \quad g = 3.$$

Então,

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y), \quad \lambda \nabla g(x, y) = \lambda(2x + y, x + 2y) = (2x\lambda + y\lambda, x\lambda + 2y\lambda).$$

Logo, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda + y\lambda \\ 2y = x\lambda + 2y\lambda \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \ \ (0,5 \text{ Pontos}) \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, teríamos $x = 0$ e $y = 0$, mas esses valores não satisfazem a equação da restrição. Logo $\lambda \neq 0$.

Multiplicando ambos os lados da primeira equação por y e da segunda equação por x, obtemos:

$$2xy = 2xy + y^2 \quad \text{e} \quad 2xy = 2xy + x^2.$$

Logo,

$$y^2 = x^2 \implies y = x \quad \text{ou} \quad y = -x.$$

Caso 1: $y = x$ Substituindo na restrição:

$$x^2 + x \cdot x + x^2 = 3 \implies 3x^2 = 3 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

Portanto, os pontos são $(1,1)$ e $(-1,-1)$ (0,2 Pontos)

Caso 2: $y=-x$ Substituindo na restrição:

$$x^2 + x(-x) + (-x)^2 = x^2 - x^2 + x^2 = x^2 = 3 \implies x = \pm\sqrt{3}.$$

Portanto, os pontos são $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ (0,2 Pontos).

Valores da função f nos pontos:

$f(1,1)=f(-1,-1)=1^2+1^2=2,\quad f(\sqrt{3},-\sqrt{3})=f(-\sqrt{3},\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2=6$ $(0,3$ Pontos$)$

Conclusão: Os pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são os pontos **mais próximos** da origem, enquanto $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ são os pontos **mais distantes** da origem $(0,0)$ (0,4 Pontos)

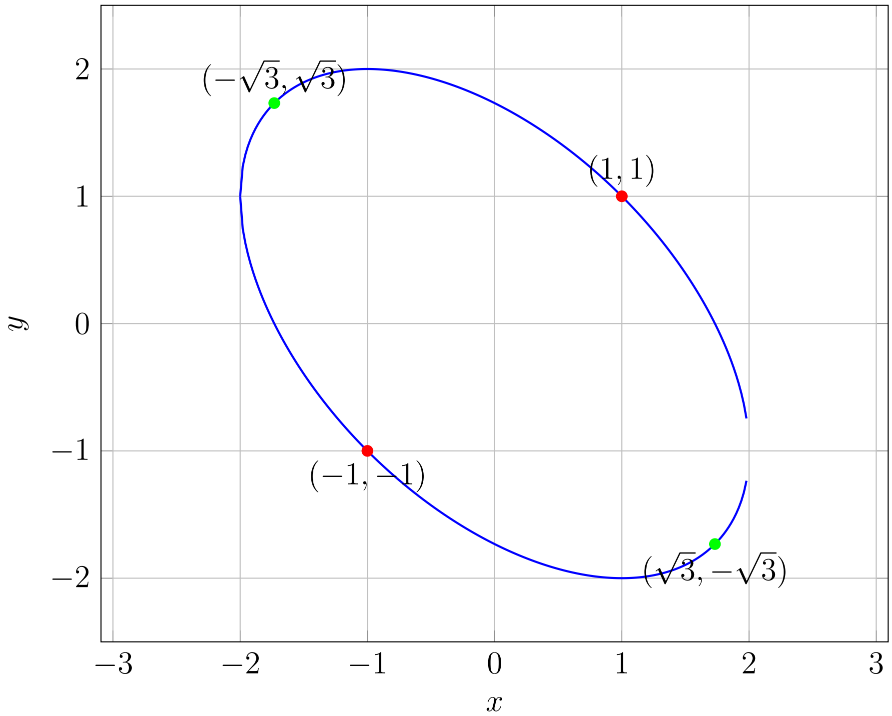


Figura: Elipse $x^2+xy+y^2=3$ e seus pontos mais próximos e distantes da origem.

BOA SORTE E SUCESSO A TODA(O)S!