IMECC/UNICAMP
MA211 - Cálculo II
Coordenador: João Vitor da Silva
Prova P2 - Manhã
10 de outubro de 2025 - 6ª-feira - 08:00hs às 10:00hs

RA: ____________ **Nome:** ____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2,5	2,5	2,5	2,5	10
Nota:					

Leia com atenção - Instruções para a realização de sua prova:

1. Usar (somente) caneta **Azul/Preta**, ou lapisera de cor escura - Não desgrampear a prova!
2. **Desliguem/Guardem** os **celulares e relógios** (Smart Watch);
3. Não é permitido sair da sala de aula durante a realização da prova;
4. Não é permitida a utilização de folhas (A4, caderno etc.) extras.
5. É vedada a utilização de qualquer material/dispositivo de apoio extra.
6. Esta prova terá início às 08:00h e término às 10:00h do dia 10 de outubro de 2025.
7. Você deverá escrever a resolução das questões de maneira clara e objetiva. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

As questões da prova estão na próxima folha.

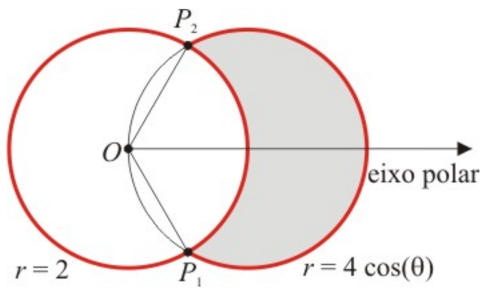
Se necessário, utilize o verso desta página como rascunho.

Q1. (2,5 pontos) Utilizando **integrais duplas**, encontre a área da região exterior ao círculo $x^2 + y^2 = 4$ e interior ao círculo $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

Dica: Use coordenadas polares

Solução: Primeiramente, temos as duas figuras geométricas podem ser descritas em coordenada polares como ((0.4) **pontos**)

$\boxed{r = 2}$ para o círculo $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$ e $\boxed{r = 4\cos(\theta)}$ para o círculo $\boxed{(x-2)^2 + y^2 = 4}$.✓



(a) Região entre as curvas polares

Desta forma, a região desejada é descrita em coordenadas polares como:

$$\mathrm{R} = \left\{(r,\theta): \ \ 2 \le r \le 4\cos(\theta) \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}\right\}.✓ \quad (0.4) \ \textbf{pontos.}$$

onde usamos acima que na interseção dos círculos, tem-se (em coordenadas polares) (0.4) **pontos.**

$$2 = r = 4\cos(\theta) \implies \cos(\theta) = \frac{1}{2} \implies \boxed{\theta = \pm\frac{\pi}{3}} \quad \text{ou seja} \quad \boxed{P_1 = \left(2, -\frac{\pi}{3}\right)} \quad \text{e} \quad \boxed{P_2 = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)}.✓$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\text{Área(R)} &= \iint_{\mathrm{R}} 1 dA \quad (0.2) \ \textbf{pontos.} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{2}^{4\cos(\theta)} r\, dr\, d\theta \quad (0.4) \ \textbf{pontos.} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(16\cos^2(\theta)) - 4\right)\, d\theta ✓
\end{aligned}$$

Além disso, sabendo que ((0.3) **pontos.**)

$$\boxed{\cos^2(\theta) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos(2\theta)\right) \quad \text{e} \quad \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2\theta)\, d\theta = \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{3}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}.✓$$

Desta forma, podemos concluir que

$$\text{Área(C)} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{16}{2}\left(1 + \cos(2\theta) - 4\right) d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 1 d\theta + 4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2\theta)\, d\theta.✓$$

Portanto,

$$\boxed{\text{Área(C)} = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3} \quad \text{unidades de área.}✓} \quad (0.4) \ \textbf{pontos.}$$

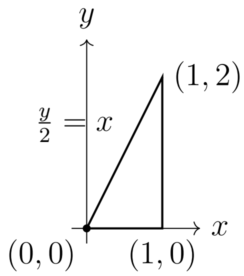
Q2. (2,5 pontos) Usando o **Teorema de Fubuni** (i.e. trocar a ordem de integração) calcule a seguinte integral iterada (Dica: Esboce primeiro a região de integração e reescreva-a de modo adequado):

$$\mathfrak{I} = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 ye^{x^3}\,dxdy.$$

Solução: Primeiramente, a região R (domínio de integração original) é dada por

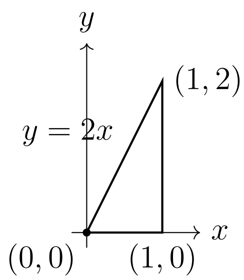
$$\boxed{\mathrm{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\quad 0 \le y \le 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{y}{2} \le x \le 1\right\} \quad \text{(Região do Tipo II).}\checkmark}$$ (0.4) **pontos.**

Equivalentemente, a fronteira esquerda é $x = \frac{y}{2}$ (ou $y = 2x$), a fronteira direita é $x = 1$, e as fronteiras horizontais são $y = 0$ e $y = 2$. Observando que $y = 2x$ intercepta $y = 2$ em $x = 1$, logo a região é o triângulo com vértices $(0,0), (1,0)$ e $(1,2)$ (0.4) **pontos.** (Vide figura abaixo).✓



Para trocar a ordem de integração, note que para x fixo temos

$$0 \le y \le 2x \qquad (\text{pois } y \le 2 \text{ e } y \le 2x;\text{ para } 0 \le x \le 1 \text{ vale } 2x \le 2).\checkmark$$



Logo, temos que

$$\boxed{\mathrm{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\quad 0 \le x \le 1 \qquad \text{e} \qquad 0 \le y \le 2x\right\} \quad \text{(Região do Tipo I)}\checkmark}$$ (0.4) **pontos.**

Assim, aplicando o Teorema de Fubini, a integral com ordem trocada fica

$$\boxed{\mathfrak{I} = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 ye^{x^3}\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{2x} y\,e^{x^3}\,dy\,dx.\checkmark}$$ (0.4) **pontos.**

Calculando a integral interna em y, temos:

$$\int_0^{2x} y\, e^{x^3}\, dy = e^{x^3} \int_0^{2x} y\, dy = e^{x^3} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2x} = e^{x^3} \cdot \frac{(2x)^2}{2} = \boxed{2x^2 e^{x^3}.\checkmark}$$

Portanto,

$$\boxed{\mathfrak{I} = \int_0^1 2x^2 e^{x^3}\, dx.\checkmark} \qquad (0.2) \textbf{ pontos.}$$

Finalmente, fazendo a substituição $u = x^3$, $du = 3x^2\, dx$ (logo $x^2\, dx = \frac{1}{3} du$), cujos novos limites de integração são $u = 0$ (dado que $x = 0$) e $u = 1$ (dado que $x = 1$) (0.3) **pontos.**
. Assim,

$$\boxed{\mathfrak{I}} = 2\int_0^1 x^2 e^{x^3}\, dx = 2\int_0^1 e^u \cdot \frac{du}{3} = \frac{2}{3}\left[e^u\right]_{u=0}^{u=1} = \boxed{\frac{2}{3}(e-1).\checkmark}$$

Conclusão:

$$\boxed{\mathfrak{I} = \int_0^2 \int_{y/2}^1 y\, e^{x^3}\, dx\, dy \ = \ \frac{2}{3}\,(e-1)\,.\checkmark} \qquad (0.4) \textbf{ pontos.}$$

Q3. **(2,5 pontos)** Denotamos com $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^3$ a bola de centro $(0,0,0)$ e raio 4, isto é

$$\mathrm{B} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 4\right\}.$$

(A) Para quais valores do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ a seguinte integral

$$\iiint_{\mathrm{B}} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\alpha} d\mathrm{V}$$

fornece um número finito como resultado (i.e., que a função $f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\alpha}$ seja integrável em B)?

(B) Obtenha o valor exato desta integral (o resultado obtido dependerá do parâmetro α).

Solução: Devido à natureza de B, consideraremos as **coordenadas esféricas**:

$$\boxed{x = \rho\cos(\theta)\sin(\phi), \qquad y = \rho\sin(\theta)\sin(\phi) \qquad \text{e} \qquad z = \rho\cos(\phi),} \checkmark \quad (0.3)\ \textbf{pontos.}$$

com $\rho \in [0,+\infty)$, $\theta \in [0,2\pi)$ e $\phi \in [0,\pi)$. Nesta forma, a bola B pode ser reescrita como

$$\boxed{\mathrm{B} = \{(\rho,\theta,\phi) \in [0,+\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi) : \ \rho \in [0,4], \ \theta \in [0,2\pi) \quad \text{e} \quad \phi \in [0,\pi)\}\,.\checkmark} \quad (0.4)\ \textbf{pontos.}$$

Assim, mudando para as coordenadas esféricas e usando o Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathrm{B}} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\alpha} d\mathrm{V} &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\int_0^4 \rho^{\alpha}\rho^2\sin(\phi)d\rho\right]d\phi\right]d\theta \quad (0.4)\ \textbf{pontos.}\\ &= \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin(\phi)d\phi\right)\left(\int_0^4 \rho^{\alpha+2}d\rho\right).\checkmark\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\int_0^{2\pi} 1d\theta = [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 2\pi\checkmark \quad (0.2)\ \textbf{pontos.} \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\pi}\sin(\phi)d\phi = [-\cos(\phi)]_{\phi=0}^{\phi=\pi} = 2.\checkmark \quad (0.2)\ \textbf{pontos.}$$

Finalmente, a análise se reduz a entender quando a seguinte integral é finita:

$$\int_0^4 \rho^{\alpha+2}d\rho = \begin{cases}\left[\dfrac{\rho^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_{\rho=0}^{\rho=4} & \text{se } \alpha \neq -3,\\ [\ln(\rho)]_{\rho=0}^{\rho=4} & \text{se } \alpha = -3,\end{cases} = \begin{cases}\boxed{\dfrac{4^{\alpha+3}}{\alpha+3}} & \text{se } \boxed{\alpha > -3},\checkmark \quad (0.2)\ \textbf{pontos.}\\ \boxed{+\infty} & \text{se } \boxed{\alpha = -3}.\checkmark \quad (0.2)\ \textbf{pontos.}\\ \boxed{+\infty} & \text{se } \boxed{\alpha < -3}.\checkmark \quad (0.2)\ \textbf{pontos.}\end{cases}$$

Portanto, concluímos que:

(A) Se $\boxed{\alpha > -3}$, a integral é **finita**. Além disso, se $\boxed{\alpha \leq -3}$, a integral **diverge**✓;

(B) O valor exato da integral é

$$\boxed{\iiint_{\mathrm{B}} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\alpha} d\mathrm{V} = (2\pi)\,(2)\left(\frac{4^{\alpha+3}\pi}{\alpha+3}\right) = \frac{4^{\alpha+4}\pi}{\alpha+3}.\checkmark} \quad (0.4)\ \textbf{pontos.}$$

Q4. (2,5 pontos) Calcule a integral $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} \frac{x-y}{x+y}$ onde R é a região limitada pelas retas

$$\boxed{x - y = 0, \quad x - y = 1, \quad x + y = 1 \quad \text{e} \quad x + y = 3},$$

utilizando a seguinte **mudança de variáveis**: $u = x + y$ e $v = x - y$.

Solução: Ao considerarmos a mudança de variáveis

$$\boxed{u = x + y}\checkmark \qquad \text{e} \qquad \boxed{v = x - y}\checkmark,$$

obtemos que

$$\boxed{x = \frac{u+v}{2} \quad (0.2)\ \textbf{pontos.} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{u-v}{2}.\checkmark} \quad (0.2)\ \textbf{pontos.}$$

Assim, temos uma transformação $\mathrm{T} : \mathrm{S} \to \mathrm{R}$ dada por $(u, v) \mapsto \mathrm{T}(u, v) = (x, y) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$, cujo jacobiano é dado por

$$\boxed{\mathrm{J_T}(u, v)} = \det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boxed{-\tfrac{1}{2}}.\checkmark \quad (0.4)\ \textbf{pontos.}$$

Desta forma, $|\mathrm{J_T}(u, v)| = \frac{1}{2}$ e $d\mathrm{A} = \frac{1}{2}\, du\, dv$. Observe ainda que

$$\mathrm{T}^{-1} : \mathrm{R} \to \mathrm{S} \quad \text{dada por} \quad \mathrm{T}^{-1}(x, y) = (u, v) = (x + y, x - y)\checkmark$$

é a transformação inversa.

Além disso, as retas que definem R correspondem (utilizando T^{-1}), em termos de u, v, a

$$\begin{array}{lcll} v = 0 & \Leftrightarrow & x - y = 0\checkmark & (0.2)\ \textbf{pontos.} \\ v = 1 & \Leftrightarrow & x - y = 1\checkmark & (0.2)\ \textbf{pontos.} \\ u = 1 & \Leftrightarrow & x + y = 1\checkmark & (0.2)\ \textbf{pontos.} \\ u = 3 & \Leftrightarrow & x + y = 3\checkmark & (0.2)\ \textbf{pontos.} \end{array}$$

Logo, a região R transforma-se em um retângulo S no plano (u, v) dado por

$$\boxed{\mathrm{S} = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le u \le 3, \quad \text{e} \quad 0 \le v \le 1\right\}.\checkmark} \quad (0.2)\ \textbf{pontos.}$$

Neste contexto, o integrando converte-se em

$$f(x, u) = \frac{x-y}{x+y} = \frac{v}{u} = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).\checkmark$$

Portanto, pelo **Teorema da Mudança de Variáveis**, temos que

$$\boxed{\iint_{\mathrm{R}} \frac{x-y}{x+y}\, d\mathrm{A} = \iint_{\mathrm{S}} \frac{v}{u}\left(\frac{1}{2}\, du\, dv\right) = \frac{1}{2}\int_1^3 \int_0^1 \frac{v}{u}\, dv\, du.\checkmark} \quad (0.3)\ \textbf{pontos.}$$

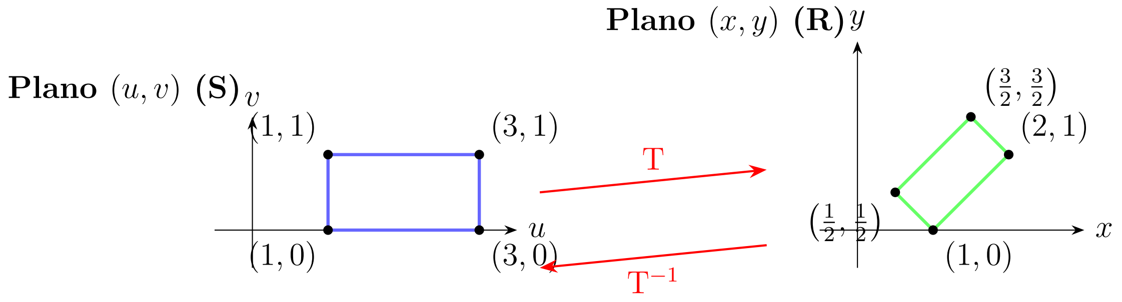
Para concluirmos, podemos utilizar o **Teorema de Fubini** para funções de variáveis separáveis:

$$\frac{1}{2}\int_1^3 \int_0^1 \frac{v}{u}\, dv\, du. = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 v\, dv\right)\left(\int_1^3 \frac{1}{u}\, du\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{v}{2}\right]_{v=0}^{v=1}\left[\ln(u)\right]_{u=1}^{u=3} = \frac{1}{4}\ln(3).\checkmark \quad (0.4)\ \textbf{pontos.}$$

Conclusão:

$$\boxed{\iint_{\mathrm{A}} \frac{x-y}{x+y}\, d\mathrm{A} \;=\; \frac{1}{4}\ln(3)\,.\checkmark}$$

A representação gráfica das regiões S e R é dada por



Transformação T **e sua inversa** T^{-1} são

$\mathrm{T}:\ (u,v) \mapsto (x,y) = \left(\dfrac{u+v}{2},\ \dfrac{u-v}{2}\right)$.

$\mathrm{T}^{-1}:\ (x,y) \mapsto (u,v) = (x+y,\ x-y)$.

Observações resumidas:

- A região S no plano (u,v) é o retângulo $[1,3]\times[0,1]$.
- A imagem $\mathrm{T(S)} = \mathrm{R}$ no plano (x,y) é o paralelogramo com vértices $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, $(2,1)$, $(1,0)$.
- O jacobiano da transformação é $\left|\det\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| = \frac{1}{2}$.

BOA SORTE E SUCESSO A TODA(O)S!