



IMECC/UNICAMP

MA211 - Cálculo II

Coordenador: João Vitor da Silva

Prova P2 - Tarde

09 de outubro de 2025 - 5ª-feira - 16:00hs às 18:00hs

RA: _____ Nome: _____

Questão:	Q1	Q2	Q3	Q4	Total:
Valor:	2,5	2,5	2,5	2,5	10
Nota:					

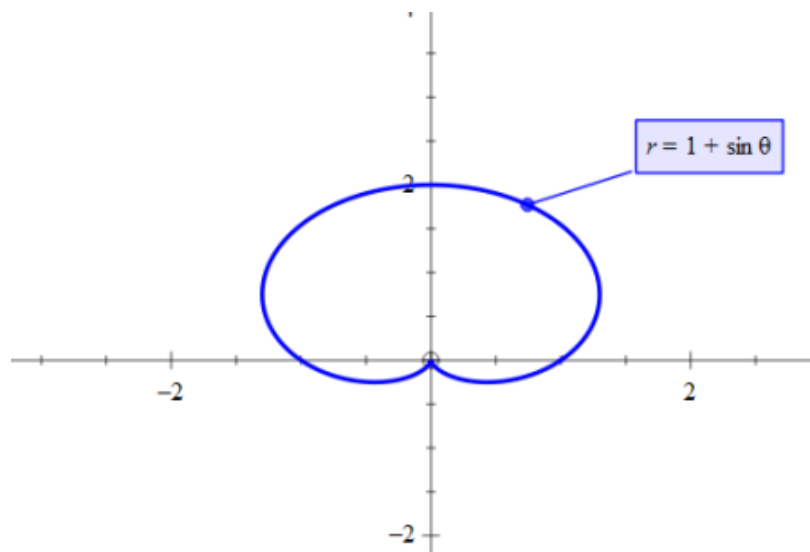
Leia com atenção - Instruções para a realização de sua prova:

1. Usar (somente) caneta **Azul/Preta**, ou lapisera de cor escura - Não desgrampear a prova!
2. **Desliguem/Guardem** os **celulares e relógios** (Smart Watch);
3. Não é permitido sair da sala de aula durante a realização da prova;
4. Não é permitida a utilização de folhas (A4, caderno etc.) extras.
5. É vedada a utilização de qualquer material/dispositivo de apoio extra.
6. Esta prova terá início às 16:00h e término às 18:00h do dia 09 de outubro de 2025.
7. Você deverá escrever a resolução das questões de maneira clara e objetiva. Respostas não acompanhadas de argumentos que as confirmem não serão consideradas.

As questões da prova estão na próxima folha.

Se necessário, utilize o verso desta página como rascunho.

Q1. (2,5 pontos) Utilizando integrais duplas calcule a área de um cardioide, dado pela curva polar $r = 1 + \sin(\theta)$.



(a) Cardioide descrita pela curva polar $r = 1 + \sin(\theta)$

Solução: Em coordenadas polares, temos que

$$\text{Cardioide} = C = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 + \sin(\theta) \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}. \checkmark \quad (0.4) \text{ pontos.}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \text{Área}(C) &= \iint_C 1 dA \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\sin(\theta)} r dr d\theta \checkmark \quad (0.4) \text{ pontos.} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \sin(\theta))^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta. \checkmark \quad (0.4) \text{ pontos.} \end{aligned}$$

Além disso, sabendo que

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = 0 \quad (0.2) \text{ pontos.}, \quad \sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) \text{ e } \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta = 0. \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.}}$$

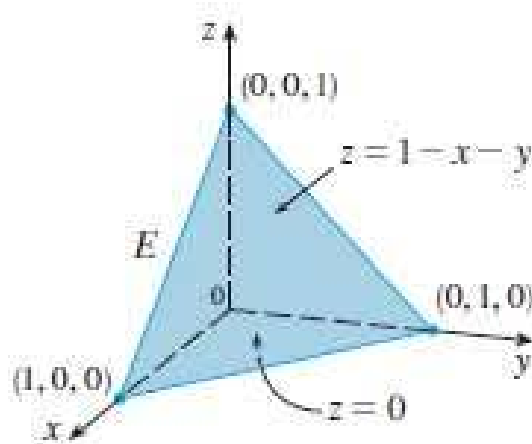
Desta forma, podemos concluir que

$$\text{Área}(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta)\right) d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} 1 d\theta - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta. \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.}$$

Portanto,

$$\boxed{\text{Área}(C) = \frac{3}{2}\pi \text{ unidades de área.} \checkmark \quad (0.5) \text{ pontos.}}$$

Q2. (2,5 pontos) Calcule $\iiint_E f(x, y, z) dV$, em que $f(x, y, z) = 5x - 3y$ e $E \subset \mathbb{R}^3$ é o tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.



(b) Tetraedro $E \subset \mathbb{R}^3$

Solução: Seja $T \subset \mathbb{R}^3$ o tetraedro limitado pelos planos

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{e} \quad x + y + z = 1.$$

Escolhendo a ordem de integração $dz \, dy \, dx$, a região pode ser parametrizada por

$$T = \{0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x \quad \text{e} \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y\}, \quad \checkmark \quad (0.6) \text{ pontos.}$$

logo

$$\mathfrak{I} = \iiint_T f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (5x - 3y) dz \, dy \, dx. \quad \checkmark \quad (0.4) \text{ pontos.}$$

Integrando primeiro em z , temos que

$$\mathfrak{I} = \int_0^1 \int_0^{1-x} (5x - 3y)(1 - x - y) dy \, dx. \quad \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.}$$

Expandindo o integrando, temos

$$(5x - 3y)(1 - x - y) = 5x - 5x^2 - 2xy - 3y + 3y^2. \quad \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.}$$

Calculando a integral interna (em y) termo a termo, obtemos

$$\int_0^{1-x} (5x - 5x^2 - 2xy - 3y + 3y^2) dy = 5x(1-x) - 5x^2(1-x) - x(1-x)^2 - \frac{3}{2}(1-x)^2 + (1-x)^3. \quad \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.}$$

Simplificando, obtemos a seguinte expressão:

$$\mathcal{J}(x) = \frac{1}{2}(1-x)^2(6x-1) = 3x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 4x - \frac{1}{2}. \quad (0.2) \text{ pontos.}$$

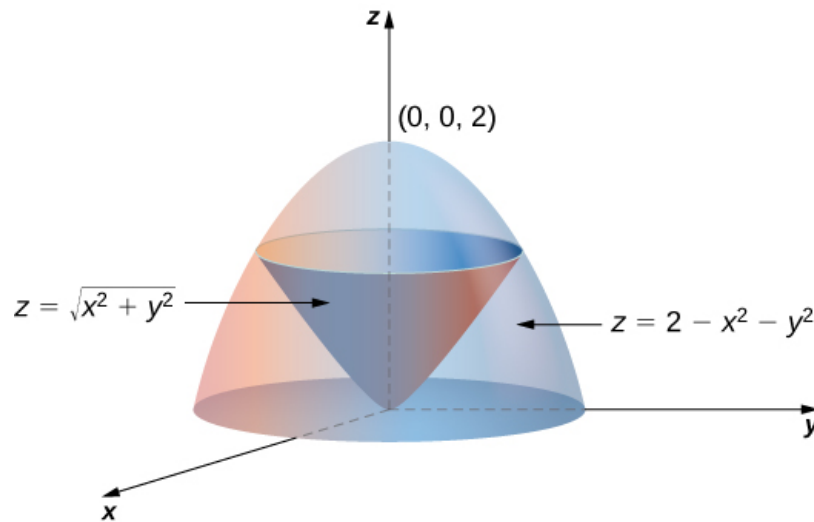
Agora integramos em x , obtemos

$$\mathfrak{I} = \int_0^1 \mathcal{J}(x) dx = \int_0^1 \left(3x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 4x - \frac{1}{2}\right) dx. \quad \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.}$$

Finalmente, calculando a primitiva e usando o **Teorema Fundamental do Cálculo**, concluímos que

$$\mathfrak{J} = \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{13}{6}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{4} - \frac{13}{6} + 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \checkmark \quad (0.5) \text{ pontos.}$$

Q3. (2,5 pontos) Seja E a região tridimensional limitada inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente pelo parabolóide $z = 2 - (x^2 + y^2)$. Monte uma integral tripla em coordenadas cilíndricas para determinar o volume da região E (i.e., calcule o volume da região E).



(c) Região limitada pelo cone e pelo parabolóide

Solução: Seja $E \subset \mathbb{R}^3$ a região sólida limitada inferiormente pelo cone

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e superiormente pelo parabolóide

$$z = 2 - (x^2 + y^2).$$

Usando **coordenadas cilíndricas** (r, θ, z) , onde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $x^2 + y^2 = r^2$, as superfícies ficam

$z = r$ (cone) (0.2) pontos	e	$z = 2 - r^2$ (parabolóide).✓ (0.2) pontos.
------------------------------------	---	--

Agora, para que a região exista, precisamos ter a restrição $0 \leq r \leq 2 - r^2$, isto é,

$r^2 + r - 2 \leq 0 \implies 0 \leq r \leq 1.$ ✓	(0.2) pontos.
--	----------------------

Além disso, o ângulo θ varia em 0 a 2π **(0.2) pontos.** . Portanto, a integral tripla que fornece o volume será

$$\text{Vol}(E) = \iiint_E 1 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{2-r^2} 1 \cdot r \, dz \, dr \, d\theta, \checkmark \quad \text{(0.4) pontos.}$$

onde o fator $r = \det \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} \right)$ corresponde ao Jacobiano das coordenadas cilíndricas.✓ **(0.2) pontos.**

Finalmente, podemos calcular o volume avaliando as integrais:

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(E) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [rz]_{z=r}^{z=2-r^2} dr d\theta \checkmark \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(2-r^2-r) dr d\theta \quad (0.3) \text{ pontos.} \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \left(\int_0^1 (2r - r^2 - r^3) dr \right) \\
 &= 2\pi \int_0^1 (2r - r^2 - r^3) dr. \checkmark \quad (0.3) \text{ pontos.}
 \end{aligned}$$

Para concluirmos, agora integramos em r e usando o **Teorema Fundamental do Cálculo**, concluímos:

$$\int_0^1 (2r - r^2 - r^3) dr = \left[r^2 - \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}. \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.}$$

Portanto,

$$\boxed{\text{Vol}(E) = 2\pi \cdot \frac{5}{12} = \frac{5\pi}{6}. \checkmark} \quad (0.3) \text{ pontos.}$$

Conclusão: O volume da região é: $\boxed{\text{Vol}(E) = \frac{5\pi}{6} \text{ unidades de volume.} \checkmark}$

Q4. (2,5 pontos) Calcule a seguinte integral $\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}} dA$ em que

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}.$$

Dica: Adotar a mudança de variáveis $u = x - y$ e $v = x + y$, esboçar a região de integração e encontrar a transformação $T(u, v) = (x, y)$, em que $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$.

Solução: Usamos a transformação (mudança de variáveis) $T^{-1} : R \rightarrow R'$ dada por:

$$v = x + y \text{ e } u = x - y. \checkmark$$

Além disso, a inversa $T : R' \rightarrow R$ é dada por:

$$x = x(u, v) = \frac{1}{2}(u + v) \quad (0.2) \text{ pontos.} \quad \text{e} \quad y = y(u, v) = \frac{1}{2}(u - v). \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.}$$

Portanto, o Jacobiano de T é dado por:

$$J_T(u, v) = \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.}$$

Observe que R é a região limitada pelas retas

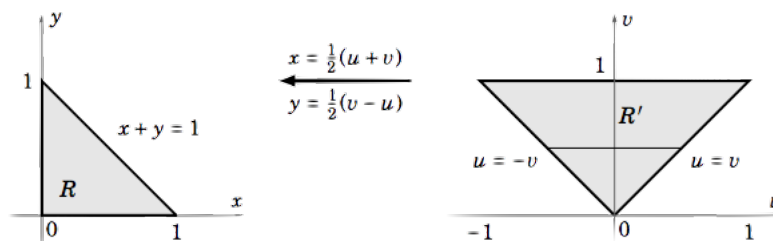
$$y = 0, \quad x = 0 \text{ e } x + y = 1. \checkmark \quad (0.3) \text{ pontos.}$$

Além disso, $R' = T^{-1}(R)$ é a região limitada pelas retas

$$\begin{cases} u = v, & (\text{imagem de } y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq 1) \text{ pela } T^{-1} \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.} \\ u = -v & (\text{imagem de } x = 0 \text{ e } 0 \leq y \leq 1) \text{ pela } T^{-1} \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.} \\ v = 1 & (\text{imagem de } x + y = 1) \text{ pela } T^{-1}. \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.} \end{cases}$$

Logo, a região R' é descrita por:

$$R' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq 1 \text{ e } -v \leq u \leq v\}. \checkmark \quad (0.2) \text{ pontos.}$$



(d) Regiões R e R' na mudança de variáveis

Portanto, pelo **Teorema de Mudança de Variáveis** temos:

$$\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}} dA = \iint_{R'} e^{\frac{u}{v}} |J_T(u, v)| dA'. \checkmark$$

Logo, pelo **Teorema de Fubini** podemos integrar de maneira iterada:

$$\begin{aligned}
 \iint_{R'} e^{\frac{u}{v}} |J_T(u, v)| dA &= \int_0^1 \int_{-v}^v \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du dv \quad (\text{Fubini}) \checkmark \quad (0.3) \text{ pontos.} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[v e^{\frac{u}{v}} \right]_{u=-v}^{u=v} dv \quad (\text{T.F.C.}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (e - e^{-1}) v dv \quad (0.2) \text{ pontos.} \\
 &= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v=0}^{v=1} \quad (\text{T.F.C.}) \\
 &= \boxed{\frac{1}{4} (e - e^{-1})} \checkmark \quad (0.3) \text{ pontos.}
 \end{aligned}$$

BOA SORTE E SUCESSO A TODA(O)S!