

Prova 1

MA311 & MA311-Especial - Noturno — Cálculo III

1º. Semestre de 2020

Instruções

ATENÇÃO: ANTES de iniciar a resolução das questões, determine quais lhe correspondem!

- **Para determinar quais questões devem ser resolvidas por você**, utilize a planilha *Google Sheet* anexa a esta Prova na plataforma *Google Classroom*. Nela, **insira seu RA** no campo em **amarelo**, aperte ENTER e observe as questões indicadas.
- **NÃO altere quaisquer outras células da planilha.**
- Para cada questão **A, B, C, D**, existem **três possibilidades 0, 1, 2.**
Anote quais lhe correspondem de acordo com a planilha.
- Para o caso (improvável) de você acidentalmente apagar a sua cópia da planilha sem ter anotado as questões, o *Google Classroom* lhe apresenta a opção de “FAZER UMA CÓPIA” novamente.
- **É SUA responsabilidade assegurar-se de que você resolverá as questões designadas a você.**
- **Caso você resolva questões diferentes das que lhe forem designadas, elas nem sequer serão corrigidas.**

1. Para esta Prova, estima-se que **1h40** são suficientes para se realizar a resolução das questões e transcrevê-las de forma adequada para submissão.
2. Você terá ainda **50 minutos adicionais** que devem ser alocados para você poder calmamente escanear e submeter sua Resolução via *Google Classroom* da forma como têm sido submetidas as Listas Avaliativas.
3. O **horário LIMITE** para realizar sua submissão é **21:30hs**. Não serão corrigidas Resoluções entregues com atraso em **nenhuma hipótese** e nem se forem enviadas por qualquer outro meio eletrônico!
4. **Por se tratar de avaliação de conhecimentos adquiridos por cada aluno, a resolução desta Prova deve ser um trabalho individual sem consulta direta or indireta a outras pessoas.**

QUALQUER TENTATIVA DE COLA OU FRAUDE ACARRETERÁ NOTA ZERO NESTA LISTA PARA TODOS OS IMPLICADOS, ALÉM DAS SANÇÕES PREVISTAS NO REGIMENTO GERAL DA UNICAMP (EM PARTICULAR, O ART. 227, INCISO VII, E OS ART. 228 A 231).

5. **Justifique detalhadamente todas as respostas. Indique as propriedades que estão sendo utilizadas em cada passo, e mostre suas contas de forma organizada.**
6. As submissões devem seguir **estritamente** o seguinte formato:
 - (a) As resoluções devem ser **manuscritas**, sem rasuras, escaneadas, formando um único documento PDF.
 - (b) No topo da primeira página das suas resoluções, coloque seu nome e RA de forma bem legível e, em seguida, a sua assinatura conforme esta conste em seu RG ou CNH.
 - (c) Inicie a resolução de CADA questão no **topo de uma nova página** indicando o número da questão claramente.
 - (d) É sua responsabilidade garantir que o arquivo escaneado seja legível. Para isso, recomenda-se o uso de um aplicativo para celular (**Android** ou **iOS**) como **Adobe Scan** (ou **CamScanner** ou **Office Lens** ou similar) para escanear as páginas manuscritas e, em seguida, fazer os devidos ajustes de contraste. Esses Apps facilitam a inclusão de múltiplas páginas em um único PDF.
 - (e) Submissões constituídas meramente de arquivos de fotos (**jpg, png, etc.**), serão desconsideradas e receberão nota zero.

QUESTÃO A

A.0. Mostre que a seguinte equação é de Bernoulli e indique qual a substituição (i.e. mudança de variável) que a torna linear. Resolva-a pelo método de Bernoulli.

$$xy' + 6y = 3xy^{\frac{4}{3}} \quad x > 0.$$

A.1. Mostre que a seguinte equação não é exata e calcule um fator integrante que a torna exata. Em seguida, resolva a equação diferencial exata.

$$2x dx + x^2 \cotg y dy = 0 \quad x > 0.$$

A.2. Resolva a seguinte e.d.o. por redução de ordem com a substituição $v(y(x)) = y'(x)$:

$$yy'' + (y')^2 = yy' \quad y > 0, \quad y' > 0.$$

QUESTÃO B

B.0. Dada a seguinte e.d.o. linear não-homogênea, encontre a solução complementar da equação homogênea associada. Em seguida, encontre a solução particular da equação diferencial pelo método de **Coefficientes Indeterminados**.

$$y^{(4)} - 4y'' = xe^x + x^2.$$

B.1. Dada a seguinte e.d.o. linear não-homogênea, encontre a solução complementar da equação homogênea associada $y_c(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$. Em seguida, encontre a solução particular $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + u_3(x)y_3(x)$ da equação diferencial pelo método de **Varição de Parâmetros**.

$$y^{(3)} - y' = x.$$

Não utilize fórmulas prontas, mas mostre como se chega à solução da e.d.o. acima usando a regra de Cramer para o sistema:

$$\begin{cases} u'_1(x)y_1(x) + u'_2(x)y_2(x) + u'_3(x)y_3(x) = 0 \\ u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) + u'_3(x)y'_3(x) = 0 \\ u'_1(x)y''_1(x) + u'_2(x)y''_2(x) + u'_3(x)y''_3(x) = f(x) \end{cases}$$

B.2. Dada a seguinte e.d.o. linear não-homogênea, mostre que $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = x$ são soluções da e.d.o. homogênea associada. Em seguida, encontre a solução particular para a e.d.o. usando o método de **Varição de Parâmetros**.

$$(1-x)y'' + xy' - y = -(x-1)^2 e^x \cos x,$$

Não utilize fórmulas prontas, mas mostre como se chega à solução da e.d.o. acima usando a regra de Cramer para o sistema:

$$\begin{cases} u'_1(x)y_1(x) + u'_2(x)y_2(x) = 0 \\ u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

QUESTÃO C

C.0. Resolva o seguinte problema de valor inicial por **Transformadas de Laplace**. Indique sempre a propriedade da tabela de transformadas de Laplace sendo utilizada em cada passo.

$$y'' - y = 20\delta(t - 2) + 6t; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 7.$$

C.1. Resolva o seguinte problema de valor inicial por **Transformadas de Laplace**. Indique sempre a propriedade da tabela de transformadas de Laplace sendo utilizada em cada passo.

$$2y'' + 4y' + 10y = (\cos t)\delta(t - 2); \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 5.$$

C.2. Resolva o seguinte problema de valor inicial por **Transformadas de Laplace**. Indique sempre a propriedade da tabela de transformadas de Laplace sendo utilizada em cada passo.

$$y'' + 4y' + 13y = 1 + \delta(t - 8); \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$$

QUESTÃO D

D.0. Dada

$$f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < \pi \\ \text{sen } t, & \pi \leq t < 3\pi \\ t - 3\pi & t \geq 3\pi \end{cases}$$

Desenhe o gráfico de $f(t)$ (não se preocupe com a escala). Expresse $f(t)$ utilizando funções escada $u(t - a) = u_a(t)$. Utilizando a expressão da função $f(t)$ encontrada, calcule a Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Justifique todas as propriedades da tabela de Transformadas de Laplace usadas.

D.1. Calcule a Transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \ln \left(\frac{s-3}{s+1} \right) \right\}.$$

Justifique todas as propriedades da tabela de Transformadas de Laplace usadas.

D.2. Resolva a equação diferencial

$$tx'' + (3t - 1)x' + 3x = 0, \quad x(0) = 0,$$

usando Transformadas de Laplace. Justifique todas as propriedades da tabela de Transformadas de Laplace usadas.

Tabela de Transformadas de Laplace

Propriedade	$f(t)$	$F(s)$
(1)	1	$\frac{1}{s}$
(2)	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
(3)	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
(4)	t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
(5)	$\text{sen } at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
(6)	$\text{cos } at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
(7)	$\text{senh } at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
(8)	$\text{cosh } at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
(9)	$e^{at}\text{sen } bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
(10)	$e^{at}\text{cos } bt$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$
(11)	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

Propriedade	$f(t)$	$F(s)$
(12)	$u_c(t) = u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$
(13)	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
(14)	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
(15)	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
(16)	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
(17)	$\delta_c(t) = \delta(t-c)$	e^{-cs}
(18)	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
(19)	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
(20)	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$
(21)	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
(22)	$f(t)$, período p	$\frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)dt$