

Prova 1

MA311 - Matutino — Cálculo III

1º. Semestre de 2020

Instruções

ATENÇÃO: ANTES de iniciar a resolução das questões, determine quais lhe correspondem!

- **Para determinar quais questões devem ser resolvidas por você**, utilize a planilha *Google Sheet* anexa a esta Prova na plataforma *Google Classroom*. Nela, **insira seu RA** no campo em **amarelo**, aperte ENTER e observe as questões indicadas.
- **NÃO altere quaisquer outras células da planilha.**
- Para cada questão **A, B, C, D**, existem **três possibilidades 0, 1, 2.**
Anote quais lhe correspondem de acordo com a planilha.
- Para o caso (improvável) de você acidentalmente apagar a sua cópia da planilha sem ter anotado as questões, o *Google Classroom* lhe apresenta a opção de “FAZER UMA CÓPIA” novamente.
- **É SUA responsabilidade assegurar-se de que você resolverá as questões designadas a você.**
- **Caso você resolva questões diferentes das que lhe forem designadas, elas nem sequer serão corrigidas.**

1. Para esta Prova, estima-se que **1h40** são suficientes para se realizar a resolução das questões e transcrevê-las de forma adequada para submissão.
2. Você terá ainda **50 minutos adicionais** que devem ser alocados para você poder calmamente escanear e submeter sua Resolução via *Google Classroom* da forma como têm sido submetidas as Listas Avaliativas.
3. O **horário LIMITE** para realizar sua submissão é **10:30hs**. Não serão corrigidas Resoluções entregues com atraso em **nenhuma hipótese** e nem se forem enviadas por qualquer outro meio eletrônico!
4. **Por se tratar de avaliação de conhecimentos adquiridos por cada aluno, a resolução desta Prova deve ser um trabalho individual sem consulta direta or indireta a outras pessoas.**

QUALQUER TENTATIVA DE COLA OU FRAUDE ACARRETERÁ NOTA ZERO NESTA LISTA PARA TODOS OS IMPLICADOS, ALÉM DAS SANÇÕES PREVISTAS NO REGIMENTO GERAL DA UNICAMP (EM PARTICULAR, O ART. 227, INCISO VII, E OS ART. 228 A 231).

5. **Justifique detalhadamente todas as respostas. Indique as propriedades que estão sendo utilizadas em cada passo, e mostre suas contas de forma organizada.**
6. As submissões devem seguir **estritamente** o seguinte formato:
 - (a) As resoluções devem ser **manuscritas**, sem rasuras, escaneadas, formando um único documento PDF.
 - (b) No topo da primeira página das suas resoluções, coloque seu nome e RA de forma bem legível e, em seguida, a sua assinatura conforme esta conste em seu RG ou CNH.
 - (c) Inicie a resolução de CADA questão no **topo de uma nova página** indicando o número da questão claramente.
 - (d) É sua responsabilidade garantir que o arquivo escaneado seja legível. Para isso, recomenda-se o uso de um aplicativo para celular (**Android** ou **iOS**) como **Adobe Scan** (ou **CamScanner** ou **Office Lens** ou similar) para escanear as páginas manuscritas e, em seguida, fazer os devidos ajustes de contraste. Esses Apps facilitam a inclusão de múltiplas páginas em um único PDF.
 - (e) Submissões constituídas meramente de arquivos de fotos (**jpg, png, etc.**), serão desconsideradas e receberão nota zero.

QUESTÃO A

A.0. Mostre que a seguinte e.d.o. é linear e resolva-a:

$$xy' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = e^{1/x} \quad x > 0.$$

A.1. Mostre que a seguinte equação não é exata e calcule um fator integrante que a torna exata. Em seguida, resolva a equação diferencial exata.

$$2xy \, dx + (y^2 - x^2) \, dy = 0 \quad y > 0 \quad x > 0.$$

A.2. Mostre que a seguinte equação é homogênea e resolva-a com a substituição $y(x) = xv(x)$:

$$xy' = y + xe^{\frac{y}{x}} \quad x > 0.$$

QUESTÃO B

B.0. Dada a seguinte e.d.o. linear não-homogênea, encontre a solução complementar da equação homogênea associada. Em seguida, encontre a solução particular da equação diferencial pelo método de **Coefficientes Indeterminados**.

$$y^{(3)} - y'' - y' + y = 2e^{-x} + 3e^x.$$

B.1. Dada a seguinte e.d.o. linear não-homogênea, encontre a solução complementar da equação homogênea associada $y_c(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$. Em seguida, encontre a solução particular $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + u_3(x)y_3(x)$ da equação diferencial pelo método de **Varição de Parâmetros**.

$$y^{(3)} + y' = \tan x.$$

Não utilize fórmulas prontas, mas mostre como se chega à solução da e.d.o. acima usando a regra de Cramer para o sistema:

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_3'(x)y_3(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_3'(x)y_3'(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2''(x) + u_3'(x)y_3''(x) = f(x) \end{cases}$$

B.2. Dada a seguinte e.d.o. linear não-homogênea, mostre que $y_1(x) = \cos(\ln x)$ e $y_2(x) = \sin(\ln x)$ são soluções da e.d.o. homogênea associada. Em seguida, encontre a solução particular para a e.d.o. usando o método de **Varição de Parâmetros**.

$$x^2 y'' + xy' + y = \ln x \quad x > 0.$$

Não utilize fórmulas prontas, mas mostre como se chega à solução da e.d.o. acima usando a regra de Cramer para o sistema:

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

QUESTÃO C

C.0. Resolva o seguinte problema de valor inicial por **Transformadas de Laplace**. Indique sempre a propriedade da tabela de transformadas de Laplace sendo utilizada em cada passo.

$$y'' + 4y' + 4y = 1 + \delta(t - 2); \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

C.1. Resolva o seguinte problema de valor inicial por **Transformadas de Laplace**. Indique sempre a propriedade da tabela de transformadas de Laplace sendo utilizada em cada passo.

$$y'' - 3y' + 2y = \delta(t - 1) + e^{2t}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

C.2. Resolva o seguinte problema de valor inicial por **Transformadas de Laplace**. Indique sempre a propriedade da tabela de transformadas de Laplace sendo utilizada em cada passo.

$$y'' + 2y' + y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

$$\text{onde } f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 3 \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}$$

QUESTÃO D

D.0. Dada

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen } t, & 0 \leq t < \pi \\ t^2, & \pi \leq t < 4 \\ 2 & t \geq 4 \end{cases}$$

Desenhe o gráfico de $f(t)$ (não se preocupe com a escala). Expresse $f(t)$ utilizando funções escada $u(t - a) = u_a(t)$. Utilizando a expressão da função $f(t)$ encontrada, calcule a Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ justificando todas as propriedades da tabela de Transformadas de Laplace usadas.

D.1. Resolva a equação diferencial

$$tx'' - 2x' + 9tx = 0, \quad x(0) = 0,$$

usando Transformadas de Laplace. Justifique todas as propriedades da tabela de Transformadas de Laplace usadas.

D.2. Calcule a transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \arctan \left(\frac{5}{s+2} \right) \right\},$$

justificando todas as propriedades da tabela de Transformadas de Laplace usadas.

Tabela de Transformadas de Laplace

Propriedade	$f(t)$	$F(s)$
(1)	1	$\frac{1}{s}$
(2)	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
(3)	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
(4)	t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
(5)	$\text{sen } at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
(6)	$\text{cos } at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
(7)	$\text{senh } at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
(8)	$\text{cosh } at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
(9)	$e^{at}\text{sen } bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
(10)	$e^{at}\text{cos } bt$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$
(11)	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

Propriedade	$f(t)$	$F(s)$
(12)	$u_c(t) = u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$
(13)	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
(14)	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
(15)	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
(16)	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
(17)	$\delta_c(t) = \delta(t-c)$	e^{-cs}
(18)	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
(19)	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
(20)	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$
(21)	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
(22)	$f(t)$, período p	$\frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)dt$