Prova 2

MA311 - Noturno e Especial — Cálculo III

1º. Semestre de 2020

Instruções

ATENÇÃO: ANTES de iniciar a resolução das questões, determine quais lhe correspondem!

- **Para determinar quais questões devem ser resolvidas por você**, utilize a planilha *Google Sheet* anexa a esta Prova na plataforma *Google Classroom*. Nela, **insira seu RA** no campo em **amarelo**, aperte ENTER e observe as questões indicadas.
- **NÃO altere quaisquer outras células da planilha.**
- Para cada questão **A, B, C, D**, existem **quatro** possibilidades **0, 1, 2, 3**.

  Anote quais lhe correspondem de acordo com a planilha.
- Para o caso (improvável) de você acidentalmente apagar a sua cópia da planilha sem ter anotado as questões, o *Google Classroom* lhe apresenta a opção de "FAZER UMA CÓPIA" novamente.
- **É SUA responsabilidade assegurar-se de que você resolverá as questões designadas a você.**
- **Caso você resolva questões diferentes das que lhe forem designadas, elas nem sequer serão corrigidas.**

1. Para esta Prova, estima-se que `1h40` são suficientes para se realizar a solução das questões e redigir as resoluções.
2. Você terá ainda `20` **minutos adicionais** que devem ser alocados para você poder calmamente escanear e submeter suas Resoluções via *Google Classroom* da forma como foi submetida a Prova 1.
3. Submissões feitas após o término do horário regulamentar (21:00hs) serão consideradas **atrasadas** mas ainda assim serão corrigidas **se esse atraso não for maior que 30 minutos**.
4. Submissões feitas após as 21:30hs ou que forem enviadas fora do *Google Classroom* não serão corrigidas e automaticamente receberão nota zero! Sem exceção.
5. **O valor de todas as questões é o mesmo!**
6. **Por se tratar de avaliação de conhecimentos adquiridos por cada aluno, a resolução desta Prova deve ser um trabalho individual sem consulta direta or indireta a outras pessoas.**
   QUALQUER TENTATIVA DE COLA OU FRAUDE ACARRETARÁ NOTA ZERO NESTA PROVA PARA TODOS OS IMPLICADOS, ALÉM DAS SANÇÕES PREVISTAS NO REGIMENTO GERAL DA UNICAMP (EM PARTICULAR, O ART. 227, INCISO VII, E OS ART. 228 A 231).
7. **Justifique detalhadamente todas as respostas. Indique as propriedades que estão sendo utilizadas em cada passo, e mostre suas contas de forma organizada.**
8. As submissões devem seguir **estritamente** o seguinte formato:
   (a) As resoluções devem ser **manuscritas**, sem rasuras, escaneadas, **formando um único documento PDF**.
   (b) No topo da primeira página das suas resoluções, coloque seu nome e RA de forma bem legível e, em seguida, a sua assinatura conforme esta conste em seu RG ou CNH.
   (c) Inicie a resolução de CADA questão no **topo de uma nova página** indicando claramente o número da questão.
   (d) É sua responsabilidade garantir que o arquivo escaneado seja legível. Para isso, recomenda-se o uso de um aplicativo para celular (`Android` ou `iOS`) como `Adobe Scan` (ou `CamScanner` ou `Office Lens` ou similar) para escanear as páginas manuscritas e, em seguida, fazer os devidos ajustes de contraste. Esses Apps facilitam a inclusão de múltiplas páginas em um único PDF.
   (e) Submissões constituídas meramente de arquivos de fotos (`jpg`, `png`, etc.), serão desconsideradas e receberão nota zero.

QUESTÃO A

A.0. Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Sugestão: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{(1+x^2)}$.

A.1. Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\ dt.$$

Sugestão: Faça uso da série de potências da exponencial.

A.2. Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função

$$f(x) = x^3 \text{arctan}\ (x^3).$$

Sugestão: primeiro encontre a representação em série de potência de arctan $x = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\ dx$

A.3. Encontre uma representação em série de potências em torno de $x = 0$ da função

$$f(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Sugestão: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x}{(1+x^2)}$.

QUESTÃO B

B.0. Considere o sistema linear não homogêneo abaixo

$$X' = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 4e^{6t} \end{bmatrix}.$$

(a) Usando o método de autovalores e autovetores, encontre a solução complementar, $X_c(t) = \Phi(t)C$, do sistema linear indicando claramente quem é a matriz fundamental $\Phi(t)$ e quem é o vetor C. (Não é necessário realizar a multiplicação $\Phi(t) \cdot C$).

(b) Utilizando o método de variação de parâmetros, encontre a solução particular, $X_p(t) = \Phi(t)U(t)$, do sistema linear não-homogêneo indicando claramente quem é o vetor $U(t)$ e como é obtido. (Não é necessário realizar a multiplicação $\Phi(t) \cdot U(t)$).

B.1. Considere o sistema linear não homogêneo abaixo

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 13e^{14t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Usando o método de autovalores e autovetores, encontre a solução complementar, $X_c(t) = \Phi(t)C$, do sistema linear indicando claramente quem é a matriz fundamental $\Phi(t)$ e quem é o vetor C. (Não é necessário realizar a multiplicação $\Phi(t) \cdot C$).

(b) Utilizando o método de variação de parâmetros, encontre a solução particular, $X_p(t) = \Phi(t)U(t)$, do sistema linear não-homogêneo indicando claramente quem é o vetor $U(t)$ e como é obtido. (Não é necessário realizar a multiplicação $\Phi(t) \cdot U(t)$).

B.2. Considere o sistema linear não homogêneo abaixo

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3e^{t} \\ 3e^{-t} \end{bmatrix}.$$

(a) Usando o método de autovalores e autovetores, encontre a solução complementar, $X_c(t) = \Phi(t)C$, do sistema linear indicando claramente quem é a matriz fundamental $\Phi(t)$ e quem é o vetor C. (Não é necessário realizar a multiplicação $\Phi(t) \cdot C$).

(b) Utilizando o método de variação de parâmetros, encontre a solução particular, $X_p(t) = \Phi(t)U(t)$, do sistema linear não-homogêneo indicando claramente quem é o vetor $U(t)$ e como é obtido. (Não é necessário realizar a multiplicação $\Phi(t) \cdot U(t)$).

B.3. Considere o sistema linear não homogêneo abaixo

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 8e^{7t} \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(a) Usando o método de autovalores e autovetores, encontre a solução complementar, $X_c(t) = \Phi(t)C$, do sistema linear indicando claramente quem é a matriz fundamental $\Phi(t)$ e quem é o vetor C. (Não é necessário realizar a multiplicação $\Phi(t) \cdot C$).

(b) Utilizando o método de variação de parâmetros, encontre a solução particular, $X_p(t) = \Phi(t)U(t)$, do sistema linear não-homogêneo indicando claramente quem é o vetor $U(t)$ e como é obtido. (Não é necessário realizar a multiplicação $\Phi(t) \cdot U(t)$).

QUESTÃO C

C.0. Considere a seguinte e.d.o.:

$$(1-x^2)y'' - 5xy' - 4y = 0$$

- Mostre que $x_0 = 0$ é um ponto ordinário.
- Obtenha a solução geral em série em torno do ponto $x_0 = 0$.

C.1. Considere a seguinte e.d.o.:

$$y'' - xy = 0$$

- Mostre que $x_0 = 0$ é um ponto ordinário.
- Obtenha a solução geral em série em torno do ponto $x_0 = 0$.

C.2. Considere a seguinte e.d.o.:

$$(x^2-4)y'' - xy' - 3y = 0$$

- Mostre que $x_0 = 0$ é um ponto ordinário.
- Obtenha a solução geral em série em torno do ponto $x_0 = 0$.

C.3. Considere a seguinte e.d.o.:

$$y'' + 2xy' + 3y = 0$$

- Mostre que $x_0 = 0$ é um ponto ordinário.
- Obtenha a solução geral em série em torno do ponto $x_0 = 0$.

QUESTÃO D

D.0. Considere a seguinte função periódica de período 2π:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & 0 \le x < \pi, \\ 3 & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

$$\& \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(a) Encontre uma série de Fourier para $f(x)$.

(b) Para qual valor a série de Fourier converge em $x = \pi$?

D.1. Considere a seguinte função periódica de período 8:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & 0 \le x < 4, \\ 1 & -4 \le x < 0 \end{cases}$$

$$\& \quad f(x+8) = f(x)$$

(a) Encontre uma série de Fourier para $f(x)$.

(b) Para qual valor a série de Fourier converge em $x = -4$?

D.2. Considere a seguinte função periódica de período 4:

$$f(x) = \begin{cases} -5 & 0 \le x < 2, \\ 1 & -2 \le x < 0 \end{cases}$$

$$\& \quad f(x+4) = f(x)$$

(a) Encontre uma série de Fourier para $f(x)$.

(b) Para qual valor a série de Fourier converge em $x = 0$?

D.3. Considere a seguinte função periódica de período 10:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & 0 \le x < 5, \\ 1 & -5 \le x < 0 \end{cases}$$

$$\& \quad f(x+10) = f(x)$$

(a) Encontre uma série de Fourier para $f(x)$.

(b) Para qual valor a série de Fourier converge em $x = 0$?