MA 327: Álgebra Linear
Prova 1- Turmas C,D,E, F
05 de Septembro de 2024

Nome completo:

RA: ______________________________________

Turma: ____________________________

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	2	3	2	3	10
Nota					

Instruções para a Realização e Entrega da Prova

- Desligue o celular: Mantenha-o fora de alcance durante toda a prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro tipo de material de consulta.
- A prova terá início às 8h00 e terminará às 9h55. Você terá **2** (**duas horas**) para resolver todas as questões.
- A prova contém **4** (**quatro**) questões, cada uma em uma folha separada. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não remova o grampo que prende as folhas da prova.
- **Respostas sem justificativa não serão consideradas.**

As questões da prova estão nas próximas páginas. **Aguarde a indicação do professor para virar a folha.**

Boa prova!

1. **Questão 1:** Considere o subconjunto $\mathcal{W}$ de matrizes em $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definido como

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (i) (**1 pt.**) Prove que $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

   (ii) (**1 pt.**) Considere o subespaço vetorial $\mathcal{R}$ de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, definido por

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -r & -p \\ r & 0 & -s \\ p & s & 0 \end{pmatrix} \mid p, r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Determinar explicitamente os subespaços $\mathcal{W} \cap \mathcal{R}$ e $\mathcal{W} + \mathcal{R}$, isto é, determine os geradores para os subespaços $\mathcal{W} \cap \mathcal{R}$ e $\mathcal{W} + \mathcal{R}$, respectivamente. Além disso, determine se o subespaço $\mathcal{W} + \mathcal{R}$ é soma direta. Justifique a sua resposta.

2. **Questão 2:** Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear que satisfaz:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2-x, \quad T\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2-1, \quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = 2x^2-x, \quad T\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2x^2-3x+4.$$

(i) (**1,5 pts.**) Para $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, calcule $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para a transformação T.

(ii) (**1,5 pts**) Determine os subespaços $Ker(T)$ e $Im(T)$.

3. **Questão 3:** (**2pts.**) Em $P_2(\mathbb{R})$, seja $\mathcal{U}$ o subespaço vetorial com base $\mathcal{B} = \{1 - t, 1 + t^2\}$. Em $\mathcal{U}$, as matrizes de mudança da base $\mathcal{B}$ para uma base $\mathcal{A}$ estão dadas por

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad [I]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1. \end{pmatrix}$$

Determine os elementos da base $\mathcal{A}$.

4. **Questão 4:** (**3 pts.**) Mostre que uma base para o espaço vetorial real $\mathcal{U}$ definido por:

$$\mathcal{U} = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(-1) = p(1) = 0\}$$

é dada pelo conjunto $B = \{1 - x^2, x - x^3\}$.