MA 327: Álgebra Linear
Prova 1- Turma X

05 de Septembro de 2024

Nome completo: ____

RA: ______________________________

Turma: ______________________

Questão	Q1	Q2	Q3	Q4	Total
Valor	2	3	2	3	10
Nota					

Instruções para a Realização e Entrega da Prova

- Desligue o celular: Mantenha-o fora de alcance durante toda a prova.
- Não é permitido o uso de calculadoras, smartwatches, celulares ou qualquer outro tipo de material de consulta.
- A prova terá início às 8h00 e terminará às 9h55. Você terá **2** (**duas horas**) para resolver todas as questões.
- A prova contém **4** (**quatro**) questões, cada uma em uma folha separada. Resolva cada questão em sua respectiva folha.
- Não remova o grampo que prende as folhas da prova.
- **Respostas sem justificativa não serão consideradas.**

As questões da prova estão nas próximas páginas. **Aguarde a indicação do professor para virar a folha.**

Boa prova!

1. **Questão 1:** Considere o subconjunto $\mathcal{U}$ de matrizes em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido como

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (i) (**0,5pts.**) Prove que $\mathcal{U}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (ii) (**1pt.**) Considere o subespaço vetorial $\mathcal{W}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dado por

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix}, \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Determine os subespaços $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ e $\mathcal{W} + \mathcal{U}$, isto é, determine os geradores para os subespaços $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ e $\mathcal{W} + \mathcal{U}$, respectivamente.

   (iii) (**0,5pts.**) A soma dos subespacios $\mathcal{W} + \mathcal{U}$ é direta? Justifique sua resposta.

2. **Questão 2:** Considere o conjunto $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, definido como

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(i) (**1,5 pts.**) Mostre que o espaço gerado pelo conjunto $\mathcal{S}$ é o subespaço das matrizes antissimétricas de ordem 3×3.

Relembre: *Uma matriz quadrada A é antissimétrica se $A^T = -A$, onde A^T denota a matriz transposta de A.*

(ii) (**1,5 pts.**) Mostre que $\mathcal{S}$ é uma base do espaço vetorial das matrizes antissimétricas de tamanho 3×3.

3. **Questão 3:** Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ tal que

$$T(1,0,1) = 2 + x^2 + x^3, \quad T(0,1,0) = 1 + x^2 \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = x^2 - x^3.$$

   (i) (**1pt.**) Para $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, calcule $T(a,b,c)$ para a transformação linear T.

   (ii) (**1pt.**) Determine os subespaços $Ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

4. **Questão 4:** Asuma que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ são bases de $\mathbb{R}^3$, e estão relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - u_2 - u_3 \\ w_2 = 2u_2 + 3u_3 \\ w_3 = 3u_1 + u_3 \end{cases}$$

   (i) (**1,5pts.**) Determine as matrizes de mudança de base $[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ e $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

   (ii) (**1,5pts.**) Considere que o elemento $u \in \mathbb{R}^3$ tem por matriz de coordenadas $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine a matriz de coordenadas do elemento u com relação à base $\mathcal{C}$.