EXAME - 13/Julho/2016 — MS512 Turma A
Importante: Mostre todos os cálculos e justificativas!

Nome: RA:

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Muitos métodos iterativos para encontrar soluções aproximadas de sistemas não-lineares,

$$F(x) = 0, \qquad F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

têm a forma

$$\begin{cases} p^k = -H^k F(x^k), \\ x^{k+1} = x^k + p^k t^k, k = 0, 1, 2... \end{cases} \tag{2}$$

onde H^k é uma matriz $n \times n$ e t^k é um escalar. Por exemplo, se $H^k = (F'(x^k))^{-1}$ e $t^k = 1$, então (2) define exatamente o método de Newton.
Diante do exposto, responda as perguntas a seguir.

(a) Descreva em detalhes os dois métodos para a resolução de sistemas não-lineares, a saber, i) o método de Newton-Broyden (levando em conta a formulação com a fórmula de Sherman-Morrison) e ii) método de Newton-Krylov, explicando em detalhes em cada caso os respectivos Pseudocódigos.

(b) Prove que os dois métodos indicados no item (a) são convergentes, explicando em detalhes as hipóteses em cada caso.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Seja uma matriz A simétrica e definida positiva associada a um sistema linear $Ax = b$, $b \neq 0$ e considere dado uma aproximação inicial x_0. Com base nessas informações, responda as perguntas a seguir.

(a) Descreva em detalhes o método SOR (*successive over-relaxation*) e mostre em detalhes um Pseudocódigo para esse algoritmo.

(b) Prove que o método SOR é convergente, explicando em detalhes as hipóteses de convergência e todos os cálculos do parâmetro ótimo $\omega \in (0, 2)$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Seja uma matriz A simétrica e definida positiva. Dada uma aproximação inicial x_0, o *método* *de mais íngreme descida*, ou *método da máxima descida*, para a resolução de $Ax = b$, $b \neq 0$, é definido como

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k,$$

onde $r_k = b - Ax_k$ é o resíduo e α_k é escolhido para minimizar $f(x_{k+1})$, onde

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top A x - x^\top b,$$

sendo $\top$ transposição. Diante do exposto, mostre que:

(a) $\alpha_k = \dfrac{r_k^\top r_k}{r_k^\top A r_k}$.

(b) $r_{k+1}^\top r_k = 0$.

(c) se $e_k := x - x_k \neq 0$ (erro), então vale que: $e_{k+1}^\top A e_{k+1} < e_k^\top A e_k$.

Dica: Isto é equivalente a mostrar que $r_{k+1}^\top A^{-1} r_{k+1} < r_k^\top A^{-1} r_k$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Responda cada um dos quatro itens abaixo:

(a) Se $Q \in \Re^{n \times n}$ é uma matriz ortogonal, então para todo x, $y \in \Re^n$ prove que:

$a.1)$ $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$

$a.2)$ $||Qx||_2 = ||x||_2$

(b) Seja A uma matriz real. Se existe uma matriz ortogonal Q tal que $A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$, prove que $A^\top A = R^\top R$. **Dica**: Realize multiplicação por blocos.

(c) Seja κ_2 o número de condição de uma matriz quadrada qualquer na norma-2. Prove que $\kappa_2(A^T A) = [\kappa_2(A)]^2$.

(d) Levando em conta o resultado do item (a), explique a utilidade dos resultados dos itens (b) e (c) na escolha de métodos numéricos para a resolução de problemas de quadrados mínimos $Ax = b$, A uma matriz $m \times n$, $m > n$ e sendo A com posto completo e $b \neq 0$.

Questão 5. (2.0 Pontos)

Após analisar os dois pseudocódigos abaixo, responda as perguntas a seguir.

Pseudocódigo 1

$k \leftarrow 0$; $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{r} \leftarrow \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}$; $\delta \leftarrow \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \rangle$
while $\left(\sqrt{\delta} > \varepsilon\sqrt{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle}\right)$ **and** $(k < k_{\max})$
  $k \leftarrow k + 1$
  if $k = 1$ **then**
    $\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{r}$
  else
    $\beta \leftarrow \delta / \delta_{\text{old}}$
    $\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{r} + \beta \boldsymbol{p}$
  end if
  $\boldsymbol{w} \leftarrow A\boldsymbol{p}$
  $\alpha \leftarrow \delta / \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{w} \rangle$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{p}$
  $\boldsymbol{r} \leftarrow \boldsymbol{r} - \alpha \boldsymbol{w}$
  $\delta_{\text{old}} \leftarrow \delta$
  $\delta \leftarrow \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \rangle$
end while

Pseudocódigo 2

integer i, k, n, s; **real array** $(a_{ij})_{1:n \times 1:n}$, $(\ell_{ij})_{1:n \times 1:n}$
for $k = 1$ **to** n **do**
  $\ell_{kk} \leftarrow \left(a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2 \right)^{1/2}$
  for $i = k + 1$ **to** n **do**
    $\ell_{ik} \leftarrow \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is}\ell_{ks} \right) \Big/ \ell_{kk}$
  end do
end do

(a) O que faz o Pseudocódigo 1 ? Trata-se de algum método computacional estudado no curso para resolução numérica de sistemas lineares e/ou não lineares ? Justifique sua resposta.

(b) O que faz o Pseudocódigo 2 ? Trata-se de algum método computacional estudado no curso para resolução numérica de sistemas lineares e/ou não lineares ? Justifique sua resposta.

(c) Para cada um dos pseudocódigos dos itens (a) e (b), discuta aspectos de eficiência computacional (o número total de operações, a utilidade prática de cada um deles, vantagens e desvantagens, etc...). Além disso, indique também exemplos práticos da vida real onde os pseudocódigos dos itens (a) e (b) podem ser utilizados.