MA141 - Geometria Analítica

1ª Lista de Exercícios

2º Semestre de 2023

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine as dimensões (isto é, *linhas vs. colunas*) de todas as matrizes apresentadas acima.

   (b) Calcule a matriz $A + \lambda B$, onde $\lambda = (\text{último dígito do seu RA}) + \frac{1}{2}$ (exemplo: RA=123456 produz $\lambda = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$)

   (c) **Sem calcular o produto**, determine a dimensão das matrizes: AB, BA, AD, BE, EF, CF

   (d) Calcule os seguintes produtos: AB, BA, AD, BE, EF, CF

   (e) Determine o conjunto solução do sistema $CX = F$.

2. Suponha que um agente esteja explorando um labirinto bidimensional em um plano cartesiano. O labirinto é representado por pontos no plano, onde cada ponto (x, y) pode ser acessado a partir de outros pontos adjacentes somente pelos movimentos cardinais norte, sul, leste ou oeste. A probabilidade de mover-se de um ponto para outro ponto adjacente é determinada por uma matriz de transição que segue os princípios de uma cadeia de Markov.

   Considere um labirinto com os seguintes pontos no plano: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ e $D(1, 1)$. Suponha que um agente comece no ponto A, e que todos os movimentos a partir de um ponto de partida tenham a mesma probabilidade. Considere também que o agente sempre se move, isto é, não é permitida a permanência no ponto originário.

   (a) Construa a matriz de transição para essa cadeia de Markov.

   (b) Desenhe um diagrama representando o labirinto e as probabilidades de transição entre os pontos. Use setas para indicar as direções permitidas.

   (c) Agora, imagine que você está observando o movimento do agente em uma sequência de passos. O agente começa em A e faz uma série de 5 movimentos, obedecendo às probabilidades de transição. Calcule a probabilidade de que o agente esteja no ponto D após 5 movimentos.

   (d) Suponha que a posição atual do agente seja desconhecida, mas você saiba que ele está em algum ponto do labirinto. Calcule a probabilidade de que o agente esteja no ponto B após um número muito grande de movimentos.

   (e) Explique como a geometria analítica e os conceitos de cadeias de Markov estão interligados nesse exercício. Como a geometria analítica é usada para modelar as probabilidades de transição entre os pontos do labirinto? Como os princípios das cadeias de Markov ajudam a entender o comportamento de longo prazo do agente no labirinto?

3. Imagine que você é um chef em um restaurante renomado e está criando novas receitas para o menu. Para garantir consistência nas porções, você decide usar matrizes para representar as proporções de ingredientes em suas receitas.

   Considere a receita de duas pizzas exclusivas: Pizza Clássica e Pizza Vegana. Os ingredientes principais são tomate, cogumelos, queijo e massa.

   A proporção de ingredientes para cada pizza é a seguinte:

   Pizza Clássica (C): - Tomate: 200g - Cogumelos: 0g (sem cogumelos) - Queijo: 150g - Massa: 300g

   Pizza Vegana (V): - Tomate: 250g - Cogumelos: 150g - Queijo: 0g (sem queijo) - Massa: 250g

   (a) Represente as proporções de ingredientes das duas pizzas usando matrizes. A matriz C representará a Pizza Clássica e a matriz V representará a Pizza Vegana.

   (b) Se você quiser fazer 3 pizzas clássicas e 2 pizzas veganas, crie uma matriz P que represente a combinação dessas pizzas.

   (c) Determine a quantidade total de cada ingrediente (tomate, queijo e massa) necessária para fazer essa combinação de 3 pizzas clássicas e 2 pizzas veganas. Use a matriz P que você criou na etapa anterior.

(d) Agora, imagine que você precisa ajustar as proporções da receita da Pizza Clássica. Você quer adicionar mais queijo, então você decide aumentar a quantidade de queijo para 200g. Atualize a matriz C para refletir essa mudança.

(e) Suponha que você queira fazer 4 pizzas clássicas com a nova proporção de ingredientes ajustada. Crie uma nova matriz Q que represente essa situação.

(f) Calcule a matriz resultante de multiplicar a matriz Q pela matriz V. O que essa matriz resultante representa no contexto das pizzas?

4. Conhecendo-se somente os produtos AB e AC, como podemos calcular $A(B+C), B^tA^t, C^tA^t$ e $(ABA)C$?

5. Mostre que se A e B são matrizes que comutam com a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $AB = BA$.

6. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é um número real qualquer. Determine todas as matrizes da forma $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ para as quais $AB = BA$ qualquer que seja o valor de λ.

7. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, as matrizes da forma $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{x} \\ x & 1 \end{bmatrix}$ satisfazem a equação matricial $A^2 - 2A = 0$.

8. Sejam A e B matrizes $m \times n$ tais que $AX = BX$ para toda matriz X de dimensão $n \times p$, mostre que $A = B$.

9. Dizemos que uma matriz quadrada A é simétrica se $A^t = A$ e anti-simétrica se $A^t = -A$.
   (a) Sejam A e B matrizes simétricas. Prove que AB é simétrica se, e somente se, $AB = BA$.
   (b) Mostre que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma anti-simétrica.
   (c) Seja A é uma matriz simétrica. Prove que se $A \neq 0$, então $A^2 \neq 0$.

10. Determine a veracidade de cada uma das seguintes afirmações, apresentando um contra-exemplo das falsas e demonstrando as que são verdadeiras.
   (a) $(-A)^t = -(A^t)$
   (b) $(A+B)^t = B^t + A^t$
   (c) Se $A^2 = 0$, então $A = 0$
   (d) $(\alpha A) \cdot (\beta B) = (\alpha\beta)AB$
   (e) $(-A)(-B) = -(AB)$