MA141 - Geometria Analítica

2ª Lista de Exercícios - Sistemas Lineares

2º Semestre de 2023

1. Identifique se cada matriz está na forma escalonada ou escalonada reduzida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Considere o sistema :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x - z = 6 \\ 3x + 2y + 4z = 13 \end{cases}$$

   (a) Escreva-o na notação matricial $AX = B$, explicitando quem são A, X e B.

   (b) Escreva sua matriz aumentada.

   (c) Determine, se existir, a solução do sistema a partir do método de eliminação de Gauss-Jordan.

3. Suponha que você está encarregado(a) de negociar cotas de quatro empresas w, x, y e z na bolsa de valores. Observando o histórico recente de compras e vendas do mercado, você percebe que se comprar 1 cota da empresa x, comprar 3 cotas da empresa y e comprar 2 cotas da empresa w; você terá uma receita negativa de R$500,00. Por sua vez, se você comprar 1 cota da empresa z e vender 3 cotas da empresa w, sua receita será de R$200,00. Denotando as operações de compra com sinal negativo, e as operações de venda com sinal positivo:

   (a) Represente as informações coletadas na forma de um sistema linear.

   (b) Escreva o sistema linear obtido em (a) na sua forma matricial.

   (c) O sistema possui variáveis livres? Quais?

   (d) No contexto de compra e venda de cotas, forneça uma interpretação para as possíveis variáveis livres. Dica: você pode interpretar as variáveis w, x, y e z como a razão rendimento/cota de cada empresa.

4. Sabendo que foram usadas as seguintes operações elementares para escalonar totalmente uma matriz $A_{3\times 3}$:

   1. $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
   2. $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
   3. $L_3 \longleftrightarrow L_2$
   4. $L_3 \leftarrow -L_3$
   5. $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
   6. $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

   (a) Escreva cada uma das operações apresentadas em termos de matrizes elementares, explicitando essas matrizes.

   (b) Encontre a matriz A.

5. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

   (a) Seja a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

   A solução geral do sistema $(2I_3 - M)X = 0$ pode ser parametrizada por $(5t, 6t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ ny + 6x = 8 \end{cases}$$

   é possível e determinado.

(c) O sistema a seguir possui infinitas soluções:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 4y + 6z = 12 \\ 3x + 6y + 9z = 18 \end{cases}$$

(d) Se S_1 e S_2 são soluções de um sistema linear não-homogêneo, então $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ também é; onde λ_1 e λ_2 são números reais.

6. Considere o sistema linear a seguir, que depende do parâmetro $m \in \mathbb{R}$, e responda o que é pedido nos itens subsequentes.

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ mx - y = m \end{cases}$$

(a) Para qual valor de m o sistema possui uma única solução?

(b) Para qual valor de m o sistema não possui nenhuma solução?

(c) Existe algum valor de m que faz com que o sistema tenha infinitas soluções?

(d) Forneça uma interpretação geométrica para os itens (a) e (b).

7. Considere o seguinte sistema linear nas variáveis x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + mz = 2 \\ mx + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Determine para quais valores de m o sistema não possui solução; possui solução única; e possui infinitas soluções. Quando houver solução, determine-a.

8. Determine o valor do parâmetro $p \in \mathbb{R}$ para que o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 2 & 1 & 1+3p \\ 0 & 2p & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ -2 \end{bmatrix}$$

Tenha: solução única; infinitas soluções; e não tenha solução. Quando houver solução, determine-a.

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & a \\ 2 & 2a-2 & -2-a & 3a-1 \\ 3 & a+2 & -3 & 2a+1 \end{bmatrix}$$

em que $a \in \mathbb{R}$. Utilize o método de Gauss-Jordan para determine o conjunto solução do sistema $AX = B$, onde $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}^t$

10. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 2 gramas do insumo A e 1 grama do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 3 gramas de insumo B e, para cada kg de Z, 3 gramas de A e 5 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R$ 3,00, R$ 2,00 e R$ 4,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1,9 kg de A e 2,4 kg de B, essa indústria arrecadou R$ 2900,00. Determine quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos.