MA141 - Geometria Analítica

3ª Lista de Exercícios - Matrizes Inversas

2º Semestre de 2023

1. Se possível, encontre as inversas das seguintes matrizes:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Seja $A \in \text{Mat}(3)$. Suponha que $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é solução do sistema homogêneo $AX = 0$. A matriz A é singular? Justifique.

3. Resolva o sistema $AX = B$, se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4. Encontre matrizes elementares $E_1, \dots, E_k$ tais que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = E_1 \dots E_k$.

5. Considerando a matriz A abaixo, determine para quais valores de α a matriz A não é invertível.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 3 \\ 2 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 2 \end{bmatrix}$$

6. Considere $A \in \text{Mat}(n)$, de sorte que vale a seguinte equação matricial $A^5 - 5A^3 + 2A^2 - 6A - I_n = 0$. Pode-se afirmar que A é uma matriz invertível? Em caso afirmativo, qual é sua inversa?

7. (a) Seja D_n uma matriz diagonal $n \times n$. Determine sob quais condições existe a inversa D_n^{-1}.

   (b) Seja $A \in \text{Mat}(n)$ tal que $A^k = 0$ para k um inteiro positivo; mostre que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

   (c) Sejam A e B matrizes quadradas. Mostre que se $A + B$ e A forem invertíveis, então

$$(A + B)^{-1} = A^{-1}(I_n + BA^{-1})^{-1}$$

   (d) Seja $J_n \in \text{Mat}(n)$ a matriz cujas entradas são todas iguais a 1. Mostre que $J_n^2 = nJ_n$, e utilize este fato para provar que, se $n > 1$, então

$$(I_n - J_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} J_n.$$

8. Sejam $A \in \text{Mat}(m, n)$ e $B \in \text{Mat}(n, m)$, com $n < m$. Mostre que AB não é invertível. (**Dica:** Mostre que o sistema $(AB)X = 0$ tem solução não trivial.

9. Vamos trabalhar em um sistema criptográfico baseado em matrizes para codificar mensagens. Neste sistema, usamos um alfabeto codificado em 5-bits de acordo com a tabela abaixo:

Caractere	Codificação em 5-bits	Caractere	Codificação em 5-bits
.	00000	P	10000
A	00001	Q	10001
B	00010	R	10010
C	00011	S	10011
D	00100	T	10100
E	00101	U	10101
F	00110	V	10110
G	00111	W	10111
H	01000	X	11000
I	01001	Y	11001
J	01010	Z	11010
K	01011	,	11011
L	01100	!	11100
M	01101	?	11101
N	01110	#	11110
O	01111	&	11111

Neste sistema, cada caractere de uma mensagem é codificado individualmente via multiplicação pela matriz de permutação P, seguida da adição pela chave secreta K,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e as operações de soma e o produto de elementos se dão no corpo dos números binários $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, onde:

$$1 \times 1 = 1; \quad 1 \times 0 = 0 \times 1 = 0; \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1; \quad 0 + 0 = 0; \quad 1 + 1 = 0.$$

Por exemplo, para cifrar o texto "OI!":

- Converta cada caractere para sua representação em 5-bits: $\text{‘O’} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{‘I’} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{‘!’} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$
- Operando com números binários, multiplique cada codificação pela matriz P e some o resultado à matriz K

$$P \times \text{‘O’} + K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$P \times \text{‘I’} + K = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P \times \text{‘!’} + K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

- Faça a tradução dos 5-bits obtidos no ponto anterior para os caracteres correspondentes, isto é,

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \text{‘M’}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \text{‘H’}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \text{‘F’}.$$

  Segue daí que a cifragem do texto “OI!” é “MHF”.

Dessa forma, pede-se:

(a) Seja x um caractere arbitrário do alfabeto considerado codificado em 5-bits como uma matriz coluna. Escreva a equação matricial do sistema criptográfico apresentado, usada para obter o caractere cifrado c.

(b) Cifre a mensagem “TCHAU!”

(c) Qual a equação matricial associada ao processo reverso, i.e., a decifragem do caractere c produzido no item (a)?

(d) Decifre a mensagem “?X!JN!?XNF”