MA141 - Geometria Analítica

4ª Lista de Exercícios - Determinantes

2º Semestre de 2023

1. (a) Calcule o determinante das matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 9 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 14 & 6 & 1 \\ 5 & -5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) Determine todos os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I_n) = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Dado $\theta \in [0, 2\pi)$ arbitrário, considere a matriz de rotação $R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule o determinante de R.

   (b) Considere a equação $\det(tI - R) = 0$, onde $t \in \mathbb{R}$. Essa equação tem solução? E se t for um número complexo?

3. Calcule $\det(A + B)$ para matrizes quadradas $n \times n$ da forma abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}.$$

4. Determine a veracidade de cada uma das seguintes afirmações, apresentando um contra-exemplo para as falsas e demonstrando as verdadeiras.

   (a) Se $A, B, C \in \mathrm{Mat}(n)$, então $\det(A(B + C)) = \det(AB) + \det(AC)$.

   (b) Se $M \in \mathrm{Mat}(n)$ é tal que $M^2 = M$, então $\det(M) = 1$.

   (c) Se $J \in \mathrm{Mat}(n)$ é tal que $J^2 = -I$, então n é par.

   (d) Se $A \in \mathrm{Mat}(n)$ é tal que $A^k = 0$, para algum $k > 0$, então A é singular.

   (e) Se $\det(A) = -3$, $\det(B) = 5$ e $\det(C) = -1$, então $\det(A^3 B^{-2} C^t B^3 A^{-2}) \neq \det(B^t A^{-1} B^{-1} C A^3 (C^{-1})^t)$.

   (f) O determinante de uma matriz triangular superior é o produto dos elementos da diagonal principal.

   (g) Uma matriz antissimétrica de ordem ímpar tem sempre determinante nulo.

5. Uma matriz de Hadamard de ordem n é uma matriz $H \in \mathrm{Mat}(n)$ que satisfaz $HH^t = nI_n$. Encontre os possíveis valores para o determinante de uma matriz de Hadamard.

6. (a) Considere a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}(3)$ definida por $a_{ij} = i^2 - \dfrac{j}{2}$. Essa matriz é singular?

   (b) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}(n)$ definida por $a_{ij} = \min(i, j)$. O caso $n = 5$, por exemplo, é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

   Expresse $\det(A)$, para n arbitrário.

7. Considere V_n a **matriz de Vandermonde** de ordem n, dada por $V_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$ com $x_i \in \mathbb{R}$.

   (a) Verifique que $\det V_2 = x_2 - x_1$.

   (b) Calcule $\det V_3$ e fatore o resultado para escrevê-lo como $\det V_3 = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$.

   (c) (**Desafio**) Utilizando o princípio da indução finita (PIF), mostre que $\det V_n = \displaystyle\prod_{i>j} (x_i - x_j)$ para n arbitrário.