MA141 - Geometria Analítica

5ª Lista de Exercícios – Vetores no plano e no espaço.

2º Semestre de 2023

1. Verifique se os pontos dados a seguir são colineares: $A = (5, 1, -3)$, $B = (0, 3, 4)$ e $C = (0, 3, -5)$.

2. Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M = (1, 2, -1)$?

3. Um paralelogramo é um quadrilátero plano com exatamente dois pares de lados paralelos. Tendo em vista esta definição:
   (a) Dados os pontos $A = (1, -2, -3)$, $B = (-5, 2, -1)$ e $C = (4, 0, -1)$; determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam vértices consecutivos de um paralelogramo.
   (b) Calcule a área do paralelogramo em que três vértices consecutivos são $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ e $C = (3, 2, 4)$.
   (c) Demonstre que as diagonais de um paralelogramo qualquer se cortam ao meio.

4. Determine a equação da reta no plano que é perpendicular ao vetor $N = (2, 3)$ e passa pelo ponto $P_0 = (-1, 1)$.

5. Decomponha $W = -\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ como a soma de dois vetores W_1 e W_2, com W_1 paralelo ao vetor $V = \vec{j} + 3\vec{k}$ e W_2 ortogonal a V.

6. Demonstre que não existe x tal que os vetores $V = x\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $W = x\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ são perpendiculares.

7. Verifique se os seguintes pontos são coplanares: $A = (2, 0, 2)$, $B = (3, 2, 0)$, $C = (0, 2, 1)$ e $D = (10, -2, 1)$.

8. Ache o vetor unitário da bissetriz do ângulo entre os vetores $V = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $W = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

9. Mostre que $A = (3, 0, 2)$, $B = (4, 3, 0)$ e $C = (8, 1, -1)$ são vértices de um triângulo retângulo. Em qual dos vértices está o ângulo reto?

10. Sejam V um vetor não nulo no espaço e α, β e γ os ângulos que V forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Demonstre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

11. Se $V \times W = V \times U$ e $V \neq \vec{0}$, então $W = U$?

12. Demonstre que, se U, V e W são vetores quaisquer, então:
    (a) $V \cdot W = \frac{1}{4}(||V + W||^2 - ||V - W||^2)$;
    (b) $||V||^2 + ||W||^2 = \frac{1}{2}(||V + W||^2 + ||V - W||^2)$;
    (c) $|V \cdot W| \leq ||V|| \cdot ||W||$;
    (d) $||V + W|| \leq ||V|| + ||W||$;
    (e) $\Big| ||V|| - ||W|| \Big| \leq ||V - W||$;
    (f) $||V \times W|| \leq ||V|| \, ||W||$;
    (g) $U \cdot (V \times W) = V \cdot (W \times U) = W \cdot (U \times V)$
    (h) $||V \times W||^2 = ||V||^2||W||^2 - (V \cdot W)^2$.