

MA141 - Geometria Analítica

7ª Lista de Exercícios – Posições relativas de retas e planos.

2º Semestre de 2023

1. Dê a posição relativa dos seguintes ternos de planos:

- (a) $\pi_1 : -3x + z = 0, \pi_2 : x = 0$ e $\pi_3 : z = 0$.
- (b) $\pi_1 : 2x + y + z = 1, \pi_2 : x + 3y + z = 2$ e $\pi_3 : x + y + 4z = 3$.
- (c) $\pi_1 : x - 2y + z = 0, \pi_2 : 2x - 4y + 2z = 1$ e $\pi_3 : x + y = 0$.
- (d) $\pi_1 : 2x - y + z = 3, \pi_2 : 3x - 2y - z = -1$ e $\pi_3 : 2x - y + 3z = 7$.

2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere as seguintes retas descritas por equações paramétricas:

$$r_1 : (x, y, z) = (\alpha + 2s, 1 + \alpha s, 2 + 3s), \quad s \in \mathbb{R},$$
$$r_2 : (x, y, z) = (2\alpha + (\alpha - 1)s, \alpha + 1, -1 + s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

- (a) Determine para quais valores de α estas retas são: distintas, coplanares, reversas, concorrentes, paralelas.
 - (b) No caso de serem distintas e coplanares, determine uma equação linear cujo conjunto-solução seja o plano que as contém.
 - (c) No caso de serem reversas, descreva um sistema linear cujo conjunto-solução seja a reta que intersecta ortogonalmente r_1 e r_2 .
3. Para cada $m \in \mathbb{R}$, considere os seguintes pontos em \mathbb{R}^3 :

$$A = (-5, 1, 1), \quad B = (-4, 1, 0), \quad C = (-4, 3, 1 + m), \quad D = (-2, 3, -1).$$

Considere também os planos $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ determinados por

$$\{A, B, C\} \subseteq \pi_1, \quad \{A, B, D\} \subseteq \pi_2, \quad \{A, C, D\} \subseteq \pi_3, \quad \{B, C, D\} \subseteq \pi_4.$$

- (a) Determine os valores de m para os quais $\pi_i = \pi_j$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq 4$.
 - (b) No caso que tais pontos não sejam coplanares, determine a posição relativa dos planos π_1, π_2, π_3 , descrevendo as interseções de cada par de planos.
4. Suponha que $A \in \text{Mat}(3)$ não tenha linhas nulas e seja $B \in \text{Mat}(3, 1)$, de modo a definir um sistema linear com matriz aumentada $[A|B]$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, seja π_i o plano que é o conjunto solução da i -ésima equação deste sistema. Descreva as possíveis posições relativas de tais planos, nas seguintes situações:
- (a) O sistema tem solução única.
 - (b) O sistema tem infinitas soluções.
 - (c) O sistema não tem solução.

5. Considere o plano

$$\pi : (x, y, z) = (2 + 3\alpha + \beta, \alpha, \alpha + 2\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Considere a reta r que passa por $A = (10, 0, 20)$ e tem $\vec{v} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ como vetor diretor.

- (a) Determine os valores de (a, b, c) para que r seja paralela a π .
 - (b) Dado $B \in r$, seja π' o plano paralelo a π contendo B . Para $\vec{v} = (1, 0, 1)$, encontre $B \neq A$ tal que π equidiste de π' e de A .
6. Mostre que duas retas não-paralelas são coplanares se, e somente se, forem concorrentes.