MA141 - Geometria Analítica

8ª Lista de Exercícios – Seções cônicas.

2º Semestre de 2023

1. Determinar a equação e identificar a trajetória de um ponto que se move de maneira que sua distância:
   (a) ao ponto $F = (6, 0)$ é sempre igual à duas vezes sua distância a reta $2x - 3 = 0$;
   (b) ao eixo (Oy) é sempre igual à duas vezes sua distância ao ponto $F = (3, 2)$.

2. Considere a cônica
$$\mathcal{C} : a(x-1)^2 + b(y+2)^2 + c = 0$$
   Determine todos os possíveis $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{C}$ seja:
   (a) uma elipse
   (b) uma hipérbole
   (c) um par de retas concorrentes
   (d) um par de retas paralelas
   (e) um ponto
   (f) o conjunto vazio

3. Dados números reais positivos a, b e c, considere as funções $x(t) = at$ e $y(t) = bt - c\frac{t^2}{2}$ para $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Mostre que a parametrização $(x(t), y(t))$ descreve uma cônica e encontre os valores de t correspondentes aos vértices da mesma.
   (b) Encontre uma diretriz desta cônica e a distância dela a algum foco.
   (c) Encontre as coordenadas polares de $(x(t), y(t))$.

4. Dados números reais positivos a e b, considere as funções $x(t) = \dfrac{a(1+t^2)}{(1-t^2)}$ e $y(t) = \dfrac{2bt}{(1-t^2)}$ para $-1 < t < 1$.
   (a) Mostre que a parametrização $(x(t), y(t))$ descreve um subconjunto de uma cônica e encontre o valor de t correspondente ao vértice contido neste subconjunto.
   (b) Encontre uma parametrização $(r(t), \theta(t))$ para as coordenadas polares do restante desta mesma cônica.

5. Considere a hipérbole de excentricidade 3 cujos focos são os pontos $(-1, 2)$ e $(2, 5)$.
   (a) Encontre os vértices, as diretrizes e as assíntotas desta hipérbole.
   (b) Encontre equação quadrática cujo conjunto solução seja esta hipérbole.

6. Considere os pontos $F = (2, 1)$ e $P = (8, 1)$ assim como a reta $r : x = -1$.
   (a) Determine $e \in \mathbb{R}$ tal que $d(P, F) = e \cdot d(P, r)$ e, para esse valor de e, determine se os pontos que satisfazem $d(A, F) = e \cdot d(A, r)$ descrevem uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola.
   (b) Encontre uma parametrização para esta cônica explicitando os valores do parâmetro que correspondem aos vértices.

7. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a equação em coordenadas polares $k + r(\cos(\theta/2))^2 = \dfrac{rk}{2k-1}$.
   (a) Mostre que os pontos (r, θ) que satisfazem a equação acima descrevem uma cônica para todo $k > 1/2$.
   (b) Determine os valores de $k > 1/2$ para que essa cônica seja: uma elipse, uma parábola e uma hipérbole.

8. Considere a parábola $y^2 = 4px$. Mostre que um espelho parabólico reflete na direção do foco os raios que incidem paralelos ao seu eixo de simetria seguindo os passos abaixo:
   (a) Usando o fato de que a inclinação α da reta tangente à parábola no ponto $P = \left(\frac{y_0^2}{4p}, y_0\right)$ é dada por $\tan(\alpha) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, mostre que se o raio incidente tem equação $y = y_0$, então a equação do raio refletido que passa por P é
$$y - y_0 = \frac{4py_0}{y_0^2 - 4p^2}\left(x - \frac{y_0^2}{4p}\right).$$
   Dica: $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$
   (b) Mostre que o raio refletido intercepta o eixo x em $(p, 0)$ (veja Figura 1 abaixo).

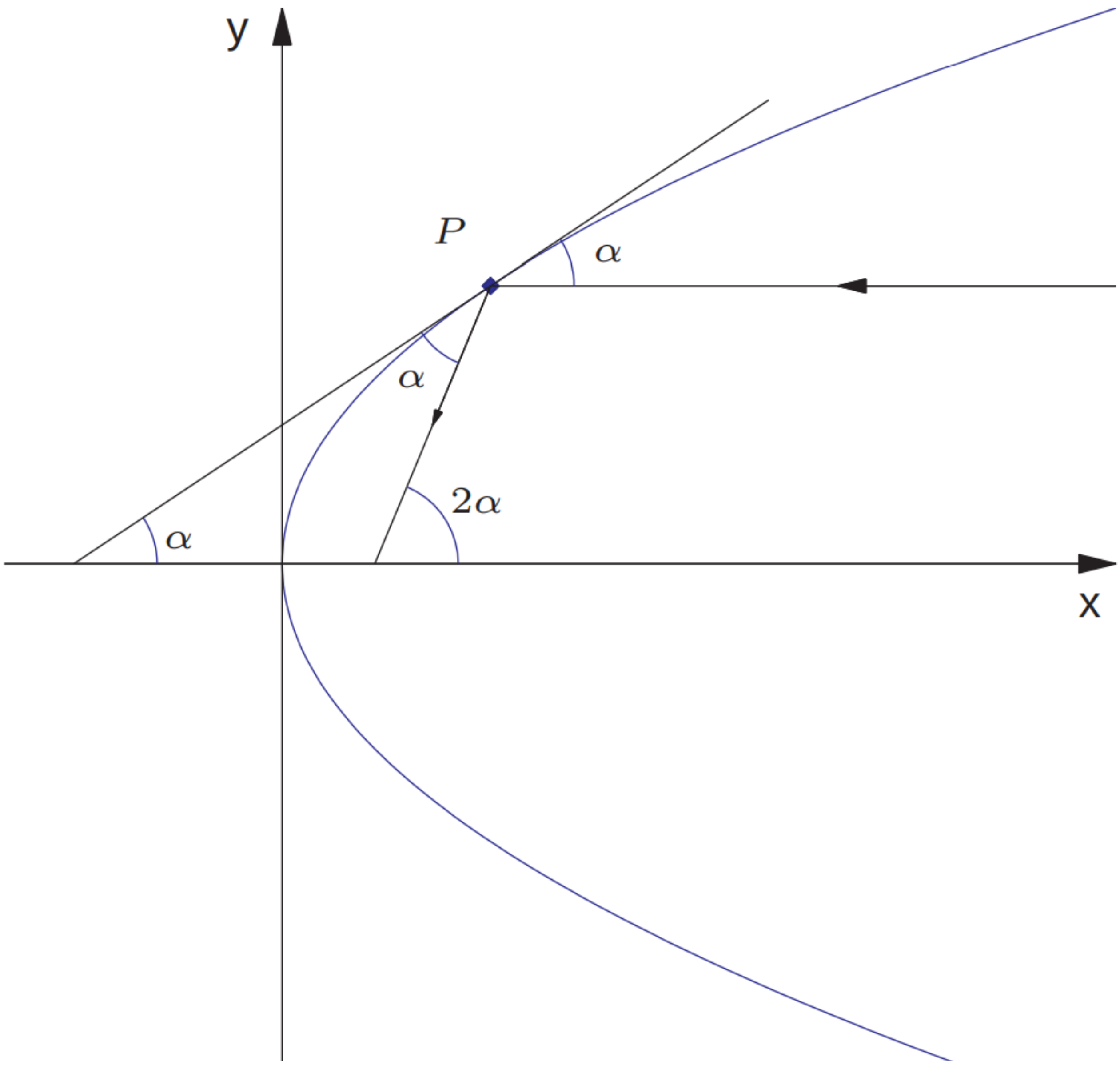

Figura 1: Espelho parabólico