MA141 - Geometria Analítica

11ª Lista de Exercícios – Rotação e translação, identificação de cônicas.

2º Semestre de 2023

Nas questões que seguem, denotaremos por $\mathcal{R}_0 = \{O; \vec{i}, \vec{j}, (\vec{k})\}$ o referencial canônico de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$).

1. Demonstre as seguintes propriedades das matrizes de rotação em $\mathbb{R}^2$, da forma $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$:
   (a) $R_\theta^{-1} = R_{(-\theta)} = R_\theta^t$.
   (b) $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$.

2. No referencial $\mathcal{R}_0$, sejam $O' = (1, 0, -1)$, $\vec{U}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\vec{U}_2 = (0, 0, 1)$ e $\vec{U}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Encontre as coordenadas do ponto $P = (2, -1, 2)$ nos seguintes referenciais:
   (a) $\mathcal{R} = \{O'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;
   (b) $\mathcal{S} = \{O; \vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$;
   (c) $\mathcal{T} = \{O'; \vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$.
   (d) Quais são as coordenadas de $\vec{U}_3$ no referencial $\mathcal{T}$?

3. O *polinômio característico* de uma matriz $A \in \mathrm{Mat}(n)$ é definido por $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, e suas raízes chamam-se *autovalores* de A. Se λ é um autovalor de A, chamamos *autovetor associado a* λ a qualquer solução não-trivial X do sistema homogêneo
$$(A - \lambda I)X = \vec{0}.$$
   Quando a matriz A é simétrica, seus autovalores têm diversas propriedades interessantes. Demonstre os seguintes fatos, no caso particular $A \in \mathrm{Mat}(2)$:
   (a) Os autovalores de A são reais.
   (b) Os autovalores de A são distintos se, e somente se, A não é diagonal.
   (c) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são autovalores de A, e X_1 e X_2 são-lhes autovetores associados, respectivamente, então $X_1 \perp X_2$.
   (d) **Desafio.** Mostre que sempre existe um ângulo θ tal que $R_\theta^t A R_\theta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

4. Identifique as cônicas a seguir:
   (a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$;
   (b) $3x^2 - 8xy - 12y^2 + 81 = 0$;
   (c) $2x^2 - 4xy - y^2 = -24$;
   (d) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$;
   (e) $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{10}x + 10\sqrt{10}y + 90 = 0$;
   (f) $5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}x = 36$;
   (g) $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6x = 0$;
   (h) $8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}x - 31\sqrt{2}y + 70 = 0$.