

1	
2	
3	
4	

Nome: \_\_\_\_\_ RA: \_\_\_\_\_

2ª Prova - MA 211 - Turma \_\_\_\_\_  
8 de outubro de 2010.

**Faça figuras grandes e claras em todas as questões. Atenção às simetrias dos problemas.**

1. [2,5 pontos] Considere a integral iterada em coordenadas polares

$$M = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta.$$

- (a) Esboce o domínio de integração no plano cartesiano.  
Sugestão: calcule previamente  $\cos 2\theta$  para  $\theta = 0, \pm \frac{\pi}{8}, \pm \frac{\pi}{4}$ .
- (b) Calcule e interprete geometricamente a integral I.

2. [2,5 pontos] Vamos demonstrar a expressão geral para o volume de um cone circular de altura  $h$  e raio da base  $R$ .

- (a) Representando o cone com o vértice na origem e base no plano  $z = h$ , expresse  $V$  por meio de uma integral dupla.
- (b) Calculando a integral, verifique que  $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ .

3. [2,5 pontos] Considere a função

$$f(x, y) = (y + x - 3)(y - x)$$

definida no quadrilátero  $Q$  de vértices  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(2, 3)$  e  $(3, 2)$ , e seja  $L$  o quadrilátero determinado pelos pontos médios das arestas de  $Q$ . O objetivo desta questão é calcular

$$N = \iint_R f dA$$

onde  $R$  é a região delimitada por  $Q$  e  $L$ .

- (a) Esboce  $Q$  e  $L$  no mesmo plano cartesiano.
- (b) No plano de coordenadas  $u, v$ , esboce as imagens de  $Q$  e  $L$  pela transformação

$$T: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + x - 3 \\ y - x \end{pmatrix}$$

e descreva a região  $T(Q)$ .

- (c) Usando simetrias, determine a integral  $N$  sem fazer cálculos.

4. [2,5 pontos] Seja  $C$  o cilindro de base circular e eixo  $(Oz)$ , com raio 2 e altura 3, com base na origem e densidade inversamente proporcional à distância ao eixo.

- (a) Determine o momento de inércia de  $C$  com relação ao eixo  $(Oz)$ .
- (b) Se  $C$  gira em torno do eixo  $(Oz)$  com energia cinética  $K$ , qual a velocidade instantânea nos pontos de sua superfície lateral?

Fórmulas:

- Momento de inércia:  $I = \iiint \rho \cdot \ell^2 dV$ ,  
onde  $\rho$  é a densidade e  $\ell$  é a distância ao eixo.
- Energia cinética de rotação:  $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ ,  
onde  $I$  é o momento de inércia e  $\omega$  é a velocidade angular.