MS 211 Cálculo Numérico

Primeiro Semestre de 2013

Lista de Exercícios MS211

Tópico 1. "Aritmética de Ponto Flutuante e Erros em Operações Numéricas. Teorema de Taylor."

Exercício 1. (Cristina, Ex. 7)

O algoritmo abaixo pode ser utilizado para calcular com quantos dígitos uma máquina trabalha.

```
epsilon = 1
ENQUANTO 1 + epsilon > 1 FAÇA
    epsilon = epsilon/2
FIMENQUANTO
Escreve o valor de epsilon
```

Explique por que o algoritmo funciona.

Exercício 2. (Conte & de Boor, 1.3-1)

Os números abaixo são fornecidos a um computador decimal que trabalha como ponto flutuante e quatro dígitos:

$$\text{(a) } 0.4523 \cdot 10^4 \quad \text{(b) } 0.2115 \cdot 10^{-3} \quad \text{(c) } 0.2583 \cdot 10^1.$$

Nesta máquina, as operações têm arredondamento no corte dos dígitos, isto é, se o primeiro dígito a ser desprezado for maior ou igual a 5, arredondar o ultimo dígito representativo para cima. Qual é o resultado das seguintes operações, calculadas nesta máquina:

(i) (a) + (b) + (c)	(ii) (a)/(c)	(iii) (a) - (b)
(iv) (a) - (b) - (c)	(v) (a)·(b)/(c)	(vi) (b)/(c)·(a)

Calcule os erros relativos e absolutos destas aproximações.

Exercício 3.

Reorganize as expressões abaixo para amenizar possíveis erros de cálculo. Escolha valores para x que evidenciem os erros.

(a) $\sqrt{x^2+1} - x$,

(b) $\ln(x+1) - \ln(x)$,

(c) $\sqrt{1+x} - 1$,

(d) $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$,

Exercício 4. (Conte & de Boor, 1.4-3)

Encontre uma forma de calcular corretamente as expressões

(a) $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{\tan x}$,

(b) $f(x) = (\alpha + x)^n - \alpha^n$,

(c) $f(x) = \sin(\alpha + x) - \sin \alpha$,

(d) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - \alpha}$,

para o número de dígitos usados quando x é próximo de zero para (a)–(c), e quando x é muito maior que α para (d).

Exercício 5. (Cristina, Ex. 3)

Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 31.69x + 14.31y & = 45.00 \\ 13.11x + 5.89y & = 19.00 \end{cases},$$

cuja única solução é $x = 7.2$ e $y = -12.8$. Resolva o sistema usando quatro dígitos e os métodos que você conhece. Compare e justifique os resultados.

Exercício 6.

Cálculo de exp(x): O objetivo é calcular $exp(x)$ pela fórmula de Taylor em torno de zero: $exp(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \cdots$.

(a) Escreva um programa para o cálculo de $exp(x)$ calculando cada termo da série através de: $termo = x_j/f_j$ onde $f_j = j!$ (fatorial de j) calculado da forma: $f_j = 1 * 2 * \cdots * j$. Observe a ocorrência de *overflow*!

(b) O procedimento abaixo obtém uma aproximação para $exp(1) = e$:

```
termo = 1;  x = 1;  s = 1;  k = 1;
ENQUANTO ....
    termo =termo*(x/k);
    s = s + termo;
    k = k + 1;
FIMENQUANTO
```

Realizando os cálculos desta forma, evita-se o *overflow* no cálculo do fatorial e a série pode ser calculada com tantos termos quanto se queira. Qual seria um critério de parada para se interromper o cálculo da série?

(c) Teste este algoritmo em alguma linguagem de programação com vários valores para x: positivos, negativos, ($x \approx 0$ e x distante de zero) e, para cada valor de x, imprima o número de iterações k para que o critério de parada seja verificado. Analise os resultados obtidos.

Exercício 7. (Conte & de Boor, 1.4-4)

Assumindo um computador com uma mantissa de quatro casas decimais, adicione os seguintes números primeiro em ordem crescente e depois em ordem decrescente. Ao fazer isso, arredonde as somas parciais. Compare seus resultados com a soma correta $x = 0.107101023 \cdot 10^5$.

$0.1580 \cdot 10^0$	$0.6266 \cdot 10^2$	$0.8999 \cdot 10^2 \cdot 10^4$
$0.2653 \cdot 10^0$	$0.7555 \cdot 10^2$	
$0.2581 \cdot 10^1$	$0.7889 \cdot 10^3$	
$0.4288 \cdot 10^1$	$0.7767 \cdot 10^3$	

Exercício 9. (Conte & de Boor, 1.7-3)

Para a fórmula de Taylor de e^x com resto, encontre n tal que a aproximação seja correta para cinco casas decimais significativas para todo x no intervalo $[0, 1]$.

Exercício 9. (Conte & de Boor, 1.7-4)

Use a fórmula de Taylor para encontrar uma série em torno de $c = 0$ para $\sin(\pi x/2)$. Encontre uma expressão para o resto, e a partir disso estime o número de termos que seriam necessários para garantir seis dígitos significativos para todo x no intervalo $[-1, 1]$.

Exercício 10. (Conte & de Boor, 1.4-5)

Uma forma extremamente instável de calcular $f(x) = e^x$ para x negativo é pela sua série de Taylor $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \cdots$. Calcule e^{-12} usando a série de Taylor centrada em $x = -12$ e compare com o valor correto $e^{-12} = 0.00000\ 61442\ 12354 \cdots$. [*Dica:* Pela série de Taylor, para $x < 0$ a diferença entre e^x e a soma parcial $s_n = \sum_0^n x^j/j!$ é menor que o próximo termo $|x^{n+1}/(n+1)!|$ em valor absoluto. Dessa forma, seria correto somar a série até $s_n = s_{n+1}$.]