MS 211 - LISTA DE EXERCICIOS No. 2
ZEROS REAIS DE FUNÇÕES REAIS

1. Localize graficamente os zeros das funções a seguir:
   a) $f(x) = 4\cos(x) - \exp(2x)$ b) $f(x) = x/2 - \tan(x)$ c) $f(x) = 1 - x\ln(x)$
   d) $f(x) = 2^x - 3x$ e) $f(x) = x^3 + x - 1000$

2. Use o método Newton–Raphson para obter a menor raiz positiva das equações a seguir com precisão 10^{-2}.
   a) $x/2 - \tan(x) = 0$; b) $2\cos(x) - \exp(x)/2 = 0$; c) $x^5 - 6 = 0$.

3. Qual o número mínimo de iterações k que será realizado pelo algoritmo do método da bissecção para satisfazer o critério de parada: $b - a < tol$ supondo que $tol = 10^{-4}$ e o intervalo inicial tem amplitude 1? Generalize seu resultado, em função de tol e da amplitude do intervalo inicial.

4. Considere a função $f(x) = exp(x) - 4x^2$.
   a) Localize graficamente os zeros de f.
   b) Considere o intervalo $I = [-1 \quad 5]$. Realize duas iterações do método da bissecção e escolha o ponto médio do último intervalo obtido como aproximação inicial para o método de Newton. Aplique o método de Newton até atingir precisão 10^{-2}. Comparando com localização dos zeros realizada no item *(a)*, identifique qual o zero obtido neste processo e justifique por que a convergência foi para esta raiz.

5. Aplique o método de Newton–Raphson à equação: $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$, com $x_0 = 1.9$. Justifique os resultados obtidos.

6. O método de Newton Modificado consiste em gerar a sequência $\{x_k\}$ através de: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0)$ onde x_0 é uma aproximação inicial.
   a) com auxílio de um gráfico, escreva a interpretação geométrica deste método;
   b) cite algumas situações em que é conveniente usar este método no lugar do método de Newton.

7. O valor de π pode ser obtido através da resolução das seguintes equações: $\sin(x) = 0$ e $\cos(x) + 1 = 0$.
   a) Aplique o método de Newton com $x_0 = 3$ e precisão 10^{-2} em cada caso e compare os resultados. Justifique os resultados obtidos.
   b) O método da bissecção pode ser aplicado na resolução da equação $\cos(x) + 1 = 0$ para obter o valor de π?

8. Considere a função: $f(x) = x^2/2 + x(\ln(x) - 1)$. Obtenha seus pontos críticos com o auxílio do método das secantes.

9. A equação $x^2 - b = 0$ tem como raiz exata $\sqrt{b}$. Aplique o método de Newton para obter $\sqrt{3356}$ com precisão 10^{-4}, se estiver usando um computador e precisão 10^{-2} se estiver usando uma calculadora não programável.

10. Use o método de Newton para obter o resultado de $\frac{3}{13}$ supondo que podem ser realizadas somente as operações de soma, subtração e multiplicação. Generalize seu procedimento para realizar a operação $\frac{b}{a}$.

11. Considere a função $f(x) = -2sen(x) + x$.
a) Localize graficamente os zeros desta função, indicando um intervalo para cada raiz.
b) Faça $x^0 = -0.8971$ e realize 3 iterações do método de Newton (considere tolerância 10^{-3}). Analise a solução obtida, considerando o chute inicial que foi escolhido.

12. Faça uma interpretação geométrica dos métodos de Newton e das Secantes.

13. Uma das dificuldades do método de Newton está na possibilidade de uma aproximação x_k ser tal que $f'(x_k) = 0$. Uma modificação do algoritmo original para prever estes casos consiste em: dado λ um número positivo próximo de zero e supondo $\mid f'(x_0) \mid \geq \lambda$, a sequência x_k é gerada através de: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/FL, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$ onde $FL = \begin{cases} f'(x_k), & \text{se } \mid f'(x_k) \mid > \lambda \\ f'(x_w), & \text{caso contrário} \end{cases}$ onde x_w é a última aproximação obtida tal que $\mid f'(x_w) \mid \geq \lambda$.
Pede-se:
(a) baseado no algoritmo de Newton, escreva um algoritmo para este método;
(b) aplique este método à resolução da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$, com $x_0 = -1.275, \quad \lambda = 0.05$ e $\varepsilon = 0.05$.

14. Seja $f(x) = x\exp(-x) - \exp(-3)$.
(a) verifique gráfica e analiticamente que $f(x)$ possui um zero no intervalo $(0, 1)$;
(b) justifique teoricamente o comportamento da sequência colocada a seguir, gerada pelo método de Newton para o cálculo zero de f em $(0, 1)$, com $x_0 = 0.9$ e precisão $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$.

$$\begin{array}{lllllllll} x_0 & = & 0.9 & x_5 & = & -3.4962 & x_{10} & = & -0.3041 \\ x_1 & = & -6.8754 & x_6 & = & -2.7182 & x_{11} & = & 0.0427 \\ x_2 & = & -6.0024 & x_7 & = & -1.9863 & x_{12} & = & 0.0440 \\ x_3 & = & -5.1452 & x_8 & = & -1.3189 & x_{13} & = & 0.0480 \\ x_4 & = & -4.3079 & x_9 & = & -0.7444 & & & \end{array}$$

Exercícios extra

1. Considere a seguinte equação: $2\cos(x) - 0.5\exp(x)$. Nos itens abaixo considere como aproximações iniciais: $[0;\ 1]$ para a bissecção; $x_0 = 0.5$ para o método de Newton e $x_0 = 0.5$ e $x_1 = 0.6$ para o método da Secante. O teste de parada é através do valor da função com precisão 10^{-8}.
a)(1.0) Realize uma iteração de cada método: cálculo de nova aproximação e teste de parada.
b) Resolvendo este problema usando o MatLab, os resultados obtidos foram os seguintes:

método	iterações	tempo(seg)	x
Bissecção	27	0.09023	0.9047882184386253
Newton	4	0.04236	0.9047882178730189
Secante	5	0.01925	0.9047882178676230

(b.1) Qual o método com o menor *tempo médio por iteração*? Este resultado é esperado? Por que?
(b.2) Analise o desempenho de cada método considerando: o algoritmo geral do método e o número de iterações e tempo de execução gastos neste problema. Qual dos três métodos foi o mais eficiente na resolução deste problema?

2. Considere a função $f(x) = 3cos(x) - 2exp(x)$
   (a) Esta função possui três pontos críticos no intervalo $[-7,\ 1]$. Para obter um dos pontos críticos realize 2 iterações do método de Newton, usando como aproximação $x_0 = -0.5$, obtenha as aproximações x_1 e x_2 e efetue o teste de parada usando a precisão $\varepsilon = 0.0005$. Explicite todas as passagens.
   (b) O valor obtido para x_2 no item (a) seria um bom chute inicial para o método de Newton para obter um zero de $f(x)$? Justifique sua resposta.

3. (a) O método de Newton Modificado consiste em gerar a sequência $\{x_k\}$ através de: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0)$ onde x_0 é uma aproximação inicial.
   (a.1) com auxílio de um gráfico, escreva a interpretação geométrica deste método;
   (a.2) cite vantagens de desvantagens deste método em relação ao método de Newton. (b) Considere a função: $f(x) = x^2/2 + x(\ln(x) - 1)$.
   Obtenha seus pontos críticos através do método de Newton. (Realize apenas duas iterações).

4. Um caixa com o topo aberto é construída a partir de uma peça de aço retangular de lados 25cm e 40cm. Para obter a caixa, deve–se cortar quadrados em cada canto do retângulo de metal. Qual o lado dos quadrados, se a caixa deve ter 250 cm^3?