MS 211 - LISTA DE EXERCICIOS No. 2 – ZEROS REAIS DE FUNÇÕES REAIS

agosto de 2012

1.)Os exercícios sugeridos nesta lista foram, em sua maioria, extraídos dos livros: Cálculo Numérico de Márcia A. Gomes-Ruggiero, Vera L. Rocha Lopes e Métodos Numéricos de Cristina Cunha.
2.) Nos exercícios em que for pedido para trabalhar com métodos de Newton ou Secante, caso não sejam estipulados os critérios e/ou tolerâncias de parada, use: $|f(x_k)| < \varepsilon_1$, $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_2$ e $k > itmax$. Valores sugeridos se executar o programa em um computador: $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ e $itmax = 100$. Se usar somente calculadora: $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ e $itmax = 10$.

---

1. Localize graficamente os zeros das funções a seguir:
   a) $f(x) = 4\cos(x) - \exp(2x)$ b) $f(x) = x/2 - \tan(x)$ c) $f(x) = 1 - x\ln(x)$
   d) $f(x) = 2^x - 3x$ e) $f(x) = x^3 + x - 1000$

2. Qual o número mínimo de iterações k que será realizado pelo algoritmo do método da bissecção para satisfazer o critério de parada: $b - a < tol$ supondo que $tol = 10^{-4}$ e que o intervalo inicial tem amplitude 1? Generalize seu resultado, em função de tol e da amplitude do intervalo inicial.

3. Faça uma interpretação geométrica dos métodos de Newton e das Secantes.

4. Escreva programas para os métodos: Bissecção, Newton e Secante, para executar no MatLab ou outra linguagem de programação. No caso de Newton e Secante use como critérios de parada: $|f(x_k)| < \varepsilon_1$, $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_2$ e $k > itmax$. Deixe as tolerâncias e o chute inicial como argumentos de entrada. Os argumentos de saída devem ser: a aproximação obtida, x_k, o valor da função neste ponto, o número de iterações, e no método da bissecção, os limites do intervalo $[a_k\ b_k]$.

5. Use o método Newton–Raphson para obter a menor raiz positiva das equações a seguir.
   a) $x/2 - \tan(x) = 0$; b) $2\cos(x) - \exp(2x) = 0$; c) $x^5 - 6 = 0$.

6. Considere a função $f(x) = \exp(x) - 4x^2$.
   a) Localize graficamente os zeros de f.
   b) Considere o intervalo $I = [-1\ \ 5]$. Realize duas iterações do método da bissecção e escolha o ponto médio do último intervalo obtido como aproximação inicial para o método de Newton. Aplique o método de Newton até atingir precisão 10^{-2}. Comparando com localização dos zeros realizada no item *(a)*, identifique qual o zero obtido neste processo e justifique por que a convergência foi para esta raiz.

7. Aplique o método de Newton–Raphson à equação: $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$, com $x_0 = 1.9$. Justifique os resultados obtidos.

8. O método de Newton Modificado consiste em gerar a sequência $\{x_k\}$ através de: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0)$ onde x_0 é uma aproximação inicial.
   a) com auxílio de um gráfico, escreva a interpretação geométrica deste método;
   b) cite algumas situações em que é conveniente usar este método no lugar do método de Newton.

9. Considere a função: $f(x) = x^2/2 + x(\ln(x) - 1)$. Obtenha seus pontos críticos com o auxílio do método das secantes. (Obs.: pontos críticos: $\overline{x} \mid f'(\overline{x}) = 0$).

10. O valor de π pode ser obtido através da resolução das equações: $\text{sen}(x) = 0$ e $\cos(x) + 1 = 0$.
    a) Aplique o método de Newton com $x_0 = 3$ em cada equação e compare os resultados. Justifique os resultados obtidos.
    b) O método da bissecção pode ser aplicado na resolução da equação $\cos(x) + 1 = 0$ para obter o valor de π?

11. *a)* A equação $x^2 - b = 0$ tem como solução exata $x^* = \sqrt{b}$. Explique como obter $\sqrt{b}$ através do método de Newton. Explique como escolheu o chute inicial.
b) Generalize seu procedimento para obter a raiz p de um número b. Isto é, explicite como obter x_{k+1} através do método de Newton, em função dos valores p e b.
c) Aplique os processos dos itens anteriores para obter a $b^{1/2}$ e $b^{1/p}$, onde b é o número formado pelos quatro últimos dígitos do seu RA e p é o último dígito do seu RA acrescido de 3. Como pode ser escolhido o chute inicial?

12. Uma aplicação interessante para o método de Newton, é o cálculo da divisão $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, usando apenas operações de soma, subtração e multiplicação. Observando que $\frac{a}{b} = a * \frac{1}{b}$, a proposta é obter, através do método de Newton e sem usar divisões, uma aproximação para $\frac{1}{b}$ e em seguida multiplicar o resultado por a. Sabemos que $\frac{1}{b}$ é solução da equação $bx - 1 = 0$. Mas, para aplicar o método de Newton, sem realizar divisões, teremos que trabalhar com $f(x) = b - 1/x$ e resolver a equação $b - 1/x = 0$. Com esta função $f(x)$ e sua derivada $f'(x)$ é possível escrever a expressão do método de Newton para x_{k+1} e após algumas manipulações algébricas obter uma expressão que não dependa de divisões.
a) Obtenha a expressão (do método de Newton) para x_{k+1} de modo que independa de divisões.
b) Aplique este processo para obter o resultado de $\frac{3}{b}$, onde b é o número formado pelos dois últimos dígitos do seu RA. . Explique como escolheu o chute inicial.

13. A função $f(x) = (4x - 7)/(x - 2)$ se anula em $x^* = 7/4$. Aplique o método de Newton, usando com aproximações iniciais:
a) $x_0 = 1.625$ *b)* $x_0 = 1.875$ *c)* $x_0 = 1.5$ *d)* $x_0 = 1.95$ *e)* $x_0 = 3$ *f)* $x_0 = 7$.
Explique os resultados obtidos, justificando teoricamente ou com auxílio de gráficos.

14. Considere a função $f(x) = -2\text{sen}(x) + x$.
a) Localize graficamente os zeros desta função, indicando um intervalo para cada raiz.
b) Faça $x^0 = -0.8971$ e realize 3 iterações do método de Newton. Verifique se x_3 satisfaz o critério de parada do valor da função com $\varepsilon_1 = 10^{-4}$. Analise a solução obtida, considerando o chute inicial que foi escolhido.

15. Seja $f(x) = x\exp(-x) - \exp(-3)$.
(a) verifique gráfica e analiticamente que $f(x)$ possui um zero no intervalo $(0, 1)$;
(b) justifique teoricamente o comportamento da sequência colocada a seguir, gerada pelo método de Newton para o cálculo zero de f em $(0, 1)$, com $x_0 = 0.9$ e precisão $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$.

x_0	=	0.9	x_3	=	-5.1452	x_6	=	-2.7182	x_9	=	-0.7444	x_{12}	=	0.0440
x_1	=	-6.8754	x_4	=	-4.3079	x_7	=	-1.9863	x_{10}	=	-0.3041	x_{13}	=	0.0480
x_2	=	-6.0024	x_5	=	-3.4962	x_8	=	-1.3189	x_{11}	=	0.0427			

16. Use o método das secantes para obter o ponto sobre a curva $y = 1/x$ mais próximo do ponto $(x,\ y) = (2,\ 1)$.

17. Considere a função $f(x) = 3\cos(x) - 2\exp(x)$
(a) Esta função possui três pontos críticos no intervalo $[-7,\ 1]$. Para obter um dos pontos críticos realize 2 iterações do método de Newton, usando como aproximação $x_0 = -0.5$, obtenha as aproximações x_1 e x_2 e efetue o teste de parada de valor da função com $\varepsilon = 0.0005$. Explicite todas as passagens.
(b) O valor obtido para x_2 no item (a) seria um bom chute inicial para o método de Newton para obter um zero de $f(x)$? Justifique sua resposta.

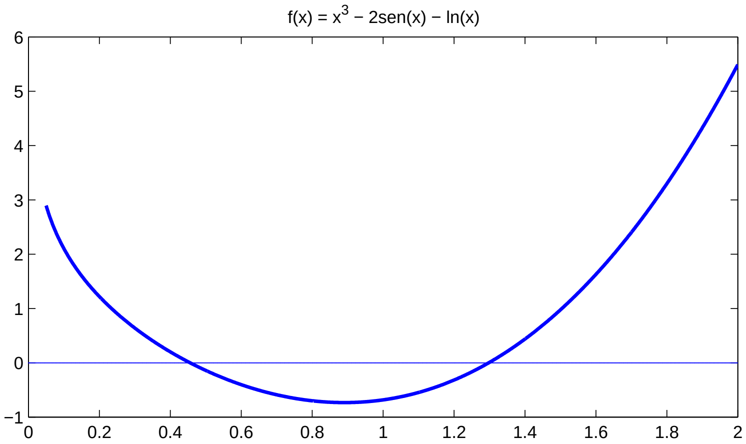
18. Considere a seguinte equação: $2\cos(x) - 0.5\exp(x)$. Nos itens abaixo considere como aproximações iniciais: $[0;\ 1]$ para a bissecção; $x_0 = 0.5$ para o método de Newton e $x_0 = 0.5$ e $x_1 = 0.6$ para o método da Secante. O teste de parada foi $|f(x_k)| < 10^{-8}$.
a) Realize uma iteração de cada método: cálculo de nova aproximação e teste de parada.
b) Resolvendo este problema usando o MatLab, os resultados obtidos foram os seguintes:

método	iterações	tempo(seg)	x
Bissecção	27	0.09023	0.9047882184386253
Newton	4	0.04236	0.9047882178730189
Secante	5	0.01925	0.9047882178676230

(b.1) Qual o método com o menor *tempo médio por iteração*? Este resultado é esperado?
(b.2) Analise o desempenho de cada método considerando: o algoritmo geral do método e o número de iterações e tempo de execução gastos neste problema. Qual dos três métodos foi o mais eficiente na resolução deste problema?

19. Um anúncio de jornal oferece o financiamento de um carro de $R\$42000$ em 36 parcelas de $R\$1371.05$, sendo que a 1a. parcela é paga no ato da compra. Qual o juro embutido neste financiamento? Uma forma de obter este juro é deduzir a função que representa o montante da dívida, mês a mês. Considerando que C representa o valor do carro e P a parcela. Inicialmente temos que o montante da dívida será $M_0 = C - P$. Ao final do 1o. mês, aplicamos a este montante o juro, j, e do total subtraímos o valor da 2a. parcela: $M_1 = M_0(1+j) - P$; repetindo este raciocínio, ao final do 2o. mês o montante será de: $M_2 = (M_0(1+j) - P)(1+j) - P = M_0(1+j)^2 - P(1+j) - P$. Daí, deduzimos que ao final do 35o. mês, o montante da dívida será: $M_{35} = M_0(1+j)^{35} - P(1+j)^{34} - P(1+j)^{33} - \ldots - P(1+j) - P$ e M_{35} deverá ser igual a zero pois a 36a. parcela foi paga. Para obter j, basta resolver esta equação por algum método estudado.

20. Esta figura corresponde ao gráfico da função: $f(x) = x^3 - 2sen(x) - ln(x)$ no intervalo $[0.5, 2]$.



a) Realize graficamente (usando a figura acima) três iterações do método da secante usando como aproximações iniciais: $x_0 = 0.8$ e $x_1 = 1.8$. Indique no gráfico os pontos obtidos: x_3, x_4 e x_5 e explique como foram obtidos, isto é, o procedimento usado para obter x_{k+1} usando informações de x_{k-1} e x_k.
b) Indique no gráfico um ponto que não seria uma boa escolha como chute inicial para o método de Newton. Justifique. Escolha um ponto inicial adequado e realize graficamente duas iterações de Newton com este chute inicial.