MS 211 - Lista de exercícios No. 2 - Zeros reais de funções reais

Primeiro semestre de 2013

Nos exercícios em que for pedido para trabalhar com métodos de Newton ou Secante, caso não sejam estipulados os critérios e/ou tolerâncias de parada, use: $\mid f(x_k) \mid < \varepsilon_1$, $\mid x_k - x_{k-1} \mid < \varepsilon_2$ e $k > itmax$. Valores sugeridos se executar o programa em um computador: $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ e $itmax = 100$. Se usar somente calculadora: $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ e $itmax = 10$.

Exercícios

1. Localize graficamente os zeros das funções a seguir:
   (a) $f(x) = 4\cos(x) - \exp(2x)$
   (b) $f(x) = x/2 - \tan(x)$
   (c) $f(x) = 1 - x\ln(x)$
   (d) $f(x) = 2^x - 3x$
   (e) $f(x) = x^3 + x - 1000$

2. Qual o número mínimo de iterações k que será realizado pelo algoritmo do método da bissecção para satisfazer o critério de parada: $b - a < tol$ supondo que $tol = 10^{-4}$ e o intervalo inicial tem amplitude 1? Generalize seu resultado, em função de tol e da amplitude do intervalo inicial.

3. Faça uma interpretação geométrica dos métodos de Newton e Secante.

4. Escreva programas para os métodos: Bissecção, Newton e Secante em uma linguagem de programação de sua escolha. No caso de Newton e Secante use como critério de parada: $\mid f(x_k) \mid < \varepsilon_1$, $\mid x_k - x_{k-1} \mid < \varepsilon_2$ e $k > itmax$. Deixe as tolerâncias e o chute inicial como argumentos de entrada. Os argumentos de saída devem ser: a aproximação obtida, x_k, o valor da função nesse ponto, o número de iteraçãoes. Para o método da bissecção use como critério de parada: $\mid f(x_k) \mid < \varepsilon_1$, $\mid a_k - b_k \mid < \varepsilon_2$ e $k > itmax$. Como argumentos de entrada use os limites do intervalo $[a, b]$ e as tolerâncias, e use os mesmos argumentos dos métodos anteriores como os dados de saída.

5. Resolva numericamente $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ no intervalo $[1, 2]$ utilizando os métodos da bissecção, Newton e secante, com precisão $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$. Compare os resultados com relação ao número de iterações. Justifique. Para o método de Newton utilize como chute inicial $x_0 = 0$. Para o método da secante utilize como chutes iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 0.5$.

6. A raiz quadrada de 2 pode ser calculada resolvendo a equação $f(x) = x^2 - 2 = 0$. Escolha um intervalo $[a, b]$ e encontre essa solução utilizando o método da bissecção com $\varepsilon = 10^{-5}$. Justifique a sua escolha.

7. Considere a função $f(x) = exp(x) - 4x^2$.

   (a) Localize graficamente os zeros de f.

   (b) Considere o intervalo $[-1, 5]$. Realize duas iterações do método da bissecção e escolha o ponto médio do último intervalo obtido como aproximação inicial para o método de Newton. Aplique o método de Newton até atingir precisão 10^{-2}. Comparando com localização dos zeros realizada no item (a), identifique qual o zero obtido neste processo e justifique por que a convergência foi para esta raiz.

8. A função $f(x) = (4x - 7)/(x - 2)$ se anula em $x = 7/4$. Calcule as iterações do método de Newton partindo das aproximações iniciais:

(a) $x_0 = 1.625$; (b) $x_0 = 1.875$; (c) $x_0 = 1.5$; (d) $x_0 = 1.95$; (e) $x_0 = 3$; (f) $x_0 = 7$
Explique graficamente seus resultados

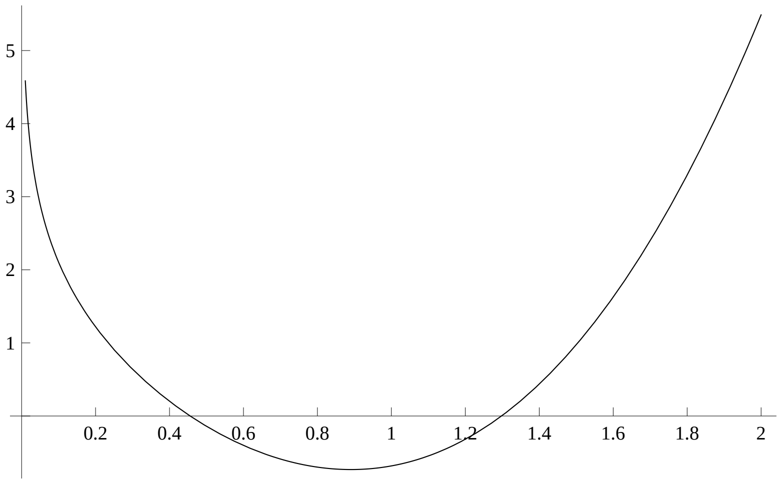
9. Ainda com $f(x)$ definida no exercício anterior, verifique que $f(1.8) \times f(3) < 0$. É possível usar o método da bissecção para localizar raízes neste intervalo?. Explique.

10. O método de Newton Modificado consiste em gerar a sequência $\{x_k\}$ através de: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0)$ onde x_0 é uma aproximação inicial.

    (a) Com auxílio de um gráfico, escreva a interpretação geométrica deste método.

    (b) Cite algumas situações em que é conveniente usar este método no lugar do método de Newton.

11. Esta figura corresponde ao gráfico da função $f(x) = x^3 - 2sen(x) - ln(x)$ no intervalo $[0.5, 2]$.



    (a) realize graficamente (usando a figura acima) três iterações do método da Secante usando como aproximações iniciais: $x_0 = 0.8$ e $x_1 = 1.8$. Indique no gráfico os pontos obtidos: x_3, x_4 e x_5 e explique como foram obtidos, isto é, o procedimento usado para obter x_{k+1} usando informações de x_{k-1} e x_k.

    (b) Indique no gráfico um ponto que não seria uma boa escolha como chute inicial para o método de Newton. Justifique. Escolha um ponto inicial adequado e realize graficamente duas iterações de Newton com este chute inicial.

12. Seja $f(x) = xe^{-x} - e^{-3}$.

    (a) Verifique gráfica e analiticamente que $f(x)$ possui um zero no intervalo $(0, 1)$.

    (b) Justifique teoricamente o comportamento da sequência exibida abaixo, gerada pelo método de Newton, com precisão $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$.

$$
\begin{array}{lll}
x_0 = 0.9 & x_5 = -3.4962 & x_{10} = -0.3041 \\
x_1 = -6.8754 & x_6 = -2.7182 & x_{11} = 0.0427 \\
x_2 = -6.0024 & x_7 = -1.9863 & x_{12} = 0.0440 \\
x_3 = -5.1452 & x_8 = -1.3189 & x_{13} = 0.0480 \\
x_4 = -4.3079 & x_9 = -0.7444 &
\end{array}
$$

13. Considere a função: $f(x) = x^2/2 + x(ln(x) - 1)$. Obtenha seus pontos críticos com o auxílio do método da secante.