MS 211 – Calculo Numérico
Lista 02

Zeros de funções

Nesta lista avalie a precisão (casas decimais exatas) usando a relação

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon,$$

onde ε é a precisão que se quer atingir.

Motivação

Exercício retirado de [1].

A função $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tem uma única raiz no intervalo $[1,\, 2]$. Tente obter esta raiz usando o método do ponto fixo para cada uma das formas abaixo usando $x_0 = 1.5$, e veja quais delas satisfazem o Teorema do Ponto Fixo.

a) $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

b) $x = g_2(x) = \left(\dfrac{10}{x+4}\right)^{1/2}$

c) $x = g_3(x) = 0.5\sqrt{10 - x^3}$

Primeiramente mostre que a equação $f(x) = 0$ pode ser colocada em cada uma das formas descritas acima (*exercício*). Proponha outra maneira de representar a equação e teste com cinco iterações do Método do Ponto Fixo.

Solução:

a) Neste item, temos que $|g_1'(x)| > 1$, para todo $x \in [1,\, 2]$, e portanto não é uma contração. Desta forma, apesar de não podermos afirmar que haverá divergência, a convergência não pode ser garantida.

b) Neste caso, temos $|g_2'(x)| < 0.15 < 1$, para todo $x \in [1,\, 2]$, ou seja, uma contração, o que garante a convergência.

c) Embora não possamos garantir convergência para o intervalo $[1,\, 2]$, é possível mostrar que podemos considerar apenas o intervalo $[1,\, 1.5]$, pois todos os iterandos do método estarão neste intervalo. Assim, para $x \in [1,\, 1.5]$ temos que $|g_3'(x)| < 0.66 < 1$. Ainda, como o limitante superior é maior do que o limitante do item b), temos que a convergência deve ser mais lenta.

A Tabela 1 mostra as iterações para o método do ponto fixo, aplicando cada uma das estratégias, iterando até que a distância entre duas aproximações sucessivas seja menor do que 10^{-4}, ou então até que seja possível detectar a divergência da sequência.

Tabela 1: Iterações do Método do Ponto Fixo

n	a)	b)	c)
0	1.5000	1.5000	1.5000
1	-0.8750	1.3484	1.2870
2	6.7324	1.3674	1.4025
3	-469.7200	1.3650	1.3455
4	$1.0275 \cdot 10^8$	1.3653	1.3752
5	$-1.0849 \cdot 10^{24}$	1.3652	1.3601
6	$1.2771 \cdot 10^{72}$	1.3652	1.3678
7	$-2.0827 \cdot 10^{216}$	1.3652	1.3639
8	$-$	1.3652	1.3659
8	$-$	1.3652	1.3649
9	$-$	1.3652	1.3659
10	$-$	1.3652	1.3654
11	$-$	1.3652	1.3651
12	$-$	1.3652	1.3653
13	$-$	1.3652	1.3652

Exercício 01

Mostre que as seguinte equações possuem exatamente uma raiz e que em cada caso a raiz está no intervalo $[0.5,\ 1]$.

a) $x^2 + \ln(x) = 0$;

b) $xe^x - 1 = 0$.

Determine essas raízes, com duas casas decimais corretas, usando o método da bissecção.

Exercício 02

Dada $\varepsilon > 0$, qual é o menor número de iterações necessárias para que o método da bissecção encontre a raiz com uma precisão ε? Considere o intervalo inicial $[a,\ b]$.

Exercício 03

Como encontrar o valor b/a em uma calculadora que realiza apenas as operações de soma, subtração e multiplicação?

Exercício 04

Mostre que os iterandos do método de Newton para resolver a equação $x^2 - a = 0$ são da forma

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \quad k = 0,\ 1,\ \ldots.$$

E use este método para calcular $\sqrt{5}$ com precisão de 10^{-8}, partindo de $x = 1.5$. Quantas iterações você fez?

Exercício 05

Escreva como você faria para calcular computacionalmente cada um dos itens abaixo.

a) e^a

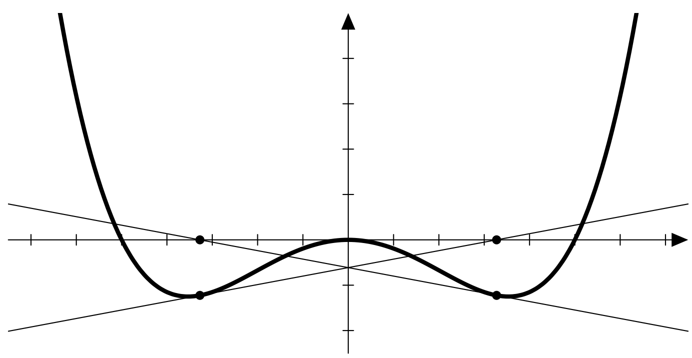
b) $\arccos(a)$

c) $\ln(a)$

Realize três iterações do método de Newton e da secante para cada função, escolhendo um chute inicial conveniente.

Exercício 06

A Figura mostra um caso em que a aplicação do método de Newton falha para a função $f(x) = x^4 - x^2$. Encontre os pontos iniciais tais que isto aconteça.



Exercício 07

Use o método da Secante para obter, com precisão de 10^{-4} o ponto da curva $y = 1/x^2$ que mais se aproxima do ponto $(2, 1)$.

Exercício 08

Obtenha os pontos críticos da função $f(x) = x^2/2 + x(\ln(x) - 1)$ fazendo uso de um método numérico.

Exercício 09

Sabemos que, se $y = f(x)$ é uma função contínua que satisfaz $f(a)f(b) < 0$ para $a < b$ números reais dados, então existe pelo menos um ponto $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Qual condição adicional garante a *unicidade* da solução neste intervalo? Justifique.

Exercício 10

A equação do movimento de Kepler para órbitas elípticas é dada por

$$M = E - e\,\sin(E).$$

Calcule E com três casas decimais de precisão usando $e = 0.0167$ e $M = 1$ através dos seguinte métodos

a) O método da bissecção;

b) O método de Newton;

c) O método da secante.

Para obter as aproximações iniciais apropriadas, grafique a função que você deseja encontrar a raiz e estime o intervalo ou o ponto inicial.

Exercício 11

A raiz real da equação $x^3 = x + 4$ pode ser escrita como

$$\alpha = \sqrt[3]{2 + \frac{1}{9}\sqrt{321}} + \sqrt[3]{2 - \frac{1}{9}\sqrt{321}}.$$

a) Usando a expressão acima, calcule α com quatro dígitos de precisão (tolerância de 10^{-5});

b) Utilize o método de Newton(-Raphson) para cacular uma aproximação para α, usando a mesma precisão. Compare os resultados obtidos.

Referências

[1] R. Burden, J. Faires, and A. Burden, *Numerical analysis*, 8 ed., 2013.

[2] S. D. Conte and C. W. D. Boor, *Elementary numerical analysis: an algorithmic approach*, McGraw-Hill Higher Education, 1980.

[3] M. C. C. Cunha, *Métodos Numéricos*, Editora da Unicamp, 2000.

[4] G. Dahlquist and A. Björk, *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[5] N. B. Franco, *Cálculo numérico*, Pearson, 2006.

[6] C. B. Moler, *Numerical computing with MATLAB, electronic edition: The MathWorks*. `http://www.mathworks.com/moler/index_ncm.html`. último acesso em 28-01-2015.

[7] M. A. G. Ruggiero and V. L. d. R. Lopes, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*, Makron Books do Brasil, 1997.