

2ª Lista de Exercícios
MS211 - 1º semestre 2019
Zeros reais de funções reais

Nos exercícios, a menos que seja especificada outra forma, avalie a precisão utilizando $|f(x_k)| < \varepsilon_1$ e $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_2$.

1. Localize graficamente os zeros das funções a seguir:

a) $f(x) = 4 \cos(x) - \exp(2x)$

d) $f(x) = 2^x - 3x$

b) $f(x) = x/2 - \tan(x)$

e) $f(x) = x^3 + x - 1000$.

c) $f(x) = 1 - x \ln(x)$

2. Determine intervalos que contenham soluções das seguintes equações e confirme se os intervalos possuem somente uma raiz.

a) $x - 3^{-x} = 0$

c) $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $4x^2 - e^x = 0$

d) $x^3 + 4,001x^2 + 4,002x + 1,101 = 0$

3. Utilize o método da Bisseção para encontrar soluções com precisão de 10^{-2} (duas casas decimais corretas) para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ nos seguintes intervalos:

a) $[0; 1]$

b) $[1; 3, 2]$

c) $[3, 2; 4]$

4. Utilizando o método da bisseção e o gráfico de $f(x)$, encontre todas as raízes de

$$f(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

com duas casas decimais corretas ($\varepsilon = 10^{-2}$). OBS: As raízes exatas são: $\cos \left[(2j-1) \frac{\pi}{12} \right]$ $j = 1, 2, \dots, 6$.

5. Qual o número de iterações necessárias para calcular uma raiz no intervalo $[2, 7]$, pelo método da Bisseção, com $\varepsilon = 0,000001$?

6. Qual o número mínimo de iterações k que será realizado pelo algoritmo do método da bisseção para satisfazer o critério de parada: $b - a < tol$ supondo que $tol = 10^{-4}$ e o intervalo inicial tem amplitude 1? Generalize seu resultado, em função de tol e da amplitude do intervalo inicial.

7. Encontre o zero das seguintes funções, pelo método da Bisseção, com $\varepsilon \leq 0,005$ ou $k > 6$.

a) $f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x - 5$, no intervalo $[1, 2; 2, 4]$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 20x + 30$, no intervalo $[1, 3; 4, 8]$

8. Use o método de Newton–Raphson para obter a menor raiz positiva das equações a seguir com precisão 10^{-2} .

a) $x/2 - \tan(x) = 0$;

b) $2 \cos(x) - \exp(x)/2 = 0$;

c) $x^5 - 6 = 0$.

9. Em alguns computadores, o cálculo de \sqrt{a} é baseado no método de Newton. Estabeleça a fórmula de iteração do método para resolver $x^2 - a = 0$ e mostre que ela pode ser escrita na forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n \geq 0.$$

10. Utilize o método do exercício anterior para calcular $\sqrt{2}$ com $\varepsilon = 10^{-8}$ e $x_0 = 1,5$. Quantas iterações seriam necessárias para encontrar um resultado com a mesma precisão se fosse utilizado o método da bisseção com o intervalo inicial $[1, 0; 2, 0]$?

11. Considere a função $f(x) = \exp(x) - 4x^2$.
- Localize graficamente os zeros de f .
 - Considere o intervalo $I = [-1 \ 5]$. Realize duas iterações do método da bissecção e escolha o ponto médio do último intervalo obtido como aproximação inicial para o método de Newton. Aplique o método de Newton até atingir precisão 10^{-2} . Comparando com localização dos zeros realizada no item (a), identifique qual o zero obtido neste processo e justifique por que a convergência foi para esta raiz.
12. Aplique o método de Newton–Raphson à equação: $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$, com $x_0 = 1.9$. Justifique os resultados obtidos.
13. O método de Newton Modificado consiste em gerar a sequência $\{x_k\}$ através de: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0)$ onde x_0 é uma aproximação inicial.
- com auxílio de um gráfico, escreva a interpretação geométrica deste método;
 - cite algumas situações em que é conveniente usar este método no lugar do método de Newton.
14. O valor de π pode ser obtido através da resolução das seguintes equações: $\sin(x) = 0$ e $\cos(x) + 1 = 0$.
- Aplique o método de Newton com $x_0 = 3$ e precisão 10^{-2} em cada caso e compare os resultados. Justifique os resultados obtidos.
 - O método da bissecção pode ser aplicado na resolução da equação $\cos(x) + 1 = 0$ para obter o valor de π ?
15. Considere a função: $f(x) = x^2/2 + x(\ln(x) - 1)$. Obtenha seus pontos críticos com o auxílio do método das secantes.
16. A equação $x^2 - b = 0$ tem como raiz exata \sqrt{b} . Aplique o método de Newton para obter $\sqrt{3356}$ com precisão 10^{-4} , se estiver usando um computador e precisão 10^{-2} se estiver usando uma calculadora não programável.
17. Considere a função $f(x) = -2\text{sen}(x) + x$.
- Localize graficamente os zeros desta função, indicando um intervalo para cada raiz.
 - Faça $x^0 = -0.8971$ e realize 3 iterações do método de Newton (considere tolerância 10^{-3}). Analise a solução obtida, considerando o chute inicial que foi escolhido.
18. Encontre o zero das seguintes funções, pelo método de Newton e o método da Secante com $\varepsilon \leq 0,0005$ ou $k > 6$ (quando não for indicado, escolha os pontos iniciais).
- $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5 = 0$, no intervalo $[1, 4]$, com: $x_0 = 4$ para Newton; $x_0 = 2$ e $x_1 = 4$ para Secante
 - $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, em $[-4, -2]$ com: $x_0 = 1$ para Newton, $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ para Secante
 - $f(x) = x^3 + \cos x$ no intervalo $[0; 1]$
 - $f(x) = 2x^3 + \ln x - 5$ no intervalo $[1; 2]$
19. O valor de π pode ser obtido através da resolução de diferentes equações, tais como
- $\sin(x) = 0$
 - $\cos(x) + 1 = 0$
- Aplique o método de Newton com $x_0 = 3$ e com precisão $\varepsilon = 10^{-7}$ em cada caso e compare os resultados obtidos. Justifique.
20. Deduza o método de Newton a partir de:
- Sua interpretação geométrica.
 - Uso de série de Taylor.

21. Seja $f(x) = e^x - 4x^2$ e α sua raiz no intervalo $[0; 1]$. Tomando $x_0 = 0,5$, encontre α com $\varepsilon = 10^{-4}$ usando o método de Newton.
22. Seja $f(x) = x^2/2 + x(\ln(x) - 1)$. Obtenha seus pontos críticos com o auxílio de um método numérico.
23. Uma das dificuldades do método de Newton está na possibilidade de uma aproximação x_k ser tal que $f'(x_k) = 0$. Uma modificação do algoritmo original para prever estes casos consiste em: dado λ um número positivo próximo de zero e supondo $|f'(x_0)| \geq \lambda$, a sequência x_k é gerada através de: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/FL$, $k = 0, 1, 2, \dots$ onde $FL = \begin{cases} f'(x_k), & \text{se } |f'(x_k)| > \lambda \\ f'(x_w), & \text{caso contrário} \end{cases}$ onde x_w é a última aproximação obtida tal que $|f'(x_w)| \geq \lambda$.
 Pede-se:
 (a) baseado no algoritmo de Newton, escreva um algoritmo para este método;
 (b) aplique este método à resolução da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$, com $x_0 = -1.275$, $\lambda = 0.05$ e $\varepsilon = 0.05$.
24. Seja $f(x) = x \exp(-x) - \exp(-3)$.
 (a) verifique gráfica e analiticamente que $f(x)$ possui um zero no intervalo $(0, 1)$;
 (b) justifique teoricamente o comportamento da sequência colocada a seguir, gerada pelo método de Newton para o cálculo zero de f em $(0, 1)$, com $x_0 = 0.9$ e precisão $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$.

$$\begin{array}{lll}
 x_0 = 0.9 & x_5 = -3.4962 & x_{10} = -0.3041 \\
 x_1 = -6.8754 & x_6 = -2.7182 & x_{11} = 0.0427 \\
 x_2 = -6.0024 & x_7 = -1.9863 & x_{12} = 0.0440 \\
 x_3 = -5.1452 & x_8 = -1.3189 & x_{13} = 0.0480 \\
 x_4 = -4.3079 & x_9 = -0.7444 &
 \end{array}$$

Referências

- [1] ATKINSON, K.: Elementary Numerical Analysis. Second edition, John Wiley & Sons (1993).
- [2] CAMPOS, F. F.: Algoritmos Numéricos. Editora LTC (2007).
- [3] FRANCO, N. B.: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2006).
- [4] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L.: Cálculo Numérico, aspectos teóricos e práticos. Pearson Makron Books (1997).
- [5] SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M.: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2003).