Lista de Exercícios 2
MS211 - 2020/S1
Zeros reais de funções reais

Nos exercícios, a menos que seja especificada outra forma, avalie a precisão utilizando $|f(x_k)| < \varepsilon_1$ e $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_2$.

---

1. Localize graficamente os zeros das funções a seguir:
   a) $f(x) = 4\cos(x) - \exp(2x)$
   b) $f(x) = x/2 - \tan(x)$
   c) $f(x) = 1 - x\ln(x)$
   d) $f(x) = 2^x - 3x$
   e) $f(x) = x^3 + x - 1000$.

2. Determine intervalos que contenham soluções das seguintes equações e confirme se os intervalos possuem somente uma raiz.
   a) $x - 3^{-x} = 0$
   b) $4x^2 - e^x = 0$
   c) $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$
   d) $x^3 + 4,001x^2 + 4,002x + 1,101 = 0$

3. Utilize o método da Bisseção para encontrar soluções com precisão de 10^{-2} (duas casas decimais corretas) para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ nos seguintes intervalos:
   a) $[0; 1]$ b) $[1; 3,2]$ c) $[3,2; 4]$

4. Utilizando o método da bisseção e o gráfico de $f(x)$, encontre todas as raízes de
$$f(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$
com duas casas decimais corretas ($\varepsilon = 10^{-2}$). OBS: As raízes exatas são: $\cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{12}\right]$ $j = 1, 2, \ldots, 6$.

5. Qual o número de iterações necessárias para calcular uma raiz no intervalo $[2, 7]$, pelo método da Bisseção, com $\varepsilon = 0,000001$?

6. Qual o número mínimo de iterações k que será realizado pelo algoritmo do método da bisseção para satisfazer o critério de parada: $b - a < tol$ supondo que $tol = 10^{-4}$ e o intervalo inicial tem amplitude 1? Generalize seu resultado, em função de tol e da amplitude do intervalo inicial.

7. Encontre o zero das seguintes funções, pelo método da Bisseção, com $\varepsilon \leq 0,005$ ou $k > 6$.
   a) $f(x) = x^2 + \text{sen}x - 5$, no intervalo $[1,2; 2,4]$
   b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 20x + 30$, no intervalo $[1,3; 4,8]$

8. Use o método de Newton–Raphson para obter a menor raiz positiva das equações a seguir com precisão 10^{-2}.
   a) $x/2 - \tan(x) = 0$; b) $2\cos(x) - \exp(x)/2 = 0$; c) $x^5 - 6 = 0$.

9. Em alguns computadores, o cálculo de $\sqrt{a}$ é baseado no método de Newton. Estabeleça a fórmula de iteração do método para resolver $x^2 - a = 0$ e mostre que ela pode ser escrita na forma
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n \geq 0.$$

10. Utilize o método do exercício anterior para calcular $\sqrt{2}$ com $\varepsilon = 10^{-8}$ e $x_0 = 1,5$. Quantas iterações seriam necessárias para encontrar um resultado com a mesma precisão se fosse utilizado o método da bisseção com o intervalo inicial $[1,0; 2,0]$?

11. Considere a função $f(x) = exp(x) - 4x^2$.
a) Localize graficamente os zeros de f.
b) Considere o intervalo $I = [-1 \ \ 5]$. Realize duas iterações do método da bissecção e escolha o ponto médio do último intervalo obtido como aproximação inicial para o método de Newton. Aplique o método de Newton até atingir precisão 10^{-2}. Comparando com localização dos zeros realizada no item *(a)*, identifique qual o zero obtido neste processo e justifique por que a convergência foi para esta raiz.

12. Aplique o método de Newton–Raphson à equação: $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$, com $x_0 = 1.9$. Justifique os resultados obtidos.

13. O método de Newton Modificado consiste em gerar a sequência $\{x_k\}$ através de: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0)$ onde x_0 é uma aproximação inicial.
a) com auxílio de um gráfico, escreva a interpretação geométrica deste método;
b) cite algumas situações em que é conveniente usar este método no lugar do método de Newton.

14. O valor de π pode ser obtido através da resolução das seguintes equações: $\sin(x) = 0$ e $\cos(x) + 1 = 0$.
a) Aplique o método de Newton com $x_0 = 3$ e precisão 10^{-2} em cada caso e compare os resultados. Justifique os resultados obtidos.
b) O método da bissecção pode ser aplicado na resolução da equação $\cos(x) + 1 = 0$ para obter o valor de π?

15. Considere a função: $f(x) = x^2/2 + x(\ln(x) - 1)$. Obtenha seus pontos críticos com o auxílio do método das secantes.

16. A equação $x^2 - b = 0$ tem como raiz exata $\sqrt{b}$. Aplique o método de Newton para obter $\sqrt{3356}$ com precisão 10^{-4}, se estiver usando um computador e precisão 10^{-2} se estiver usando uma calculadora não programável.

17. Considere a função $f(x) = -2sen(x) + x$.
a) Localize graficamente os zeros desta função, indicando um intervalo para cada raiz.
b) Faça $x^0 = -0.8971$ e realize 3 iterações do método de Newton (considere tolerância 10^{-3}). Analise a solução obtida, considerando o chute inicial que foi escolhido.

18. Encontre o zero das seguintes funções, pelo método de Newton e o método da Secante com $\varepsilon \leq 0,0005$ ou $k > 6$ (quando não for indicado, escolha os pontos iniciais).

    a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5 = 0$, no intervalo $[1, 4]$, com: $x_0 = 4$ para Newton; $x_0 = 2$ e $x_1 = 4$ para Secante
    b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, em $[-4, -2]$ com: $x_0 = 1$ para Newton, $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ para Secante
    c) $f(x) = x^3 + \cos x$ no intervalo $[0; 1]$
    d) $f(x) = 2x^3 + \ln x - 5$ no intervalo $[1; 2]$

19. O valor de π pode ser obtido através da resolução de diferentes equações, tais como

    a) $\sin(x) = 0$
    b) $\cos(x) + 1 = 0$

    Aplique o método de Newton com $x_0 = 3$ e com precisão $\varepsilon = 10^{-7}$ em cada caso e compare os resultados obtidos. Justifique.

20. Deduza o método de Newton a partir de:

    a) Sua interpretação geométrica.
    b) Uso de série de Taylor.

21. Seja $f(x) = \mathrm{e}^x - 4x^2$ e α sua raiz no intervalo $[0; 1]$. Tomando $x_0 = 0,5$, encontre α com $\varepsilon = 10^{-4}$ usando o método de Newton.

22. Seja $f(x) = x^2/2 + x(\ln(x) - 1)$. Obtenha seus pontos críticos com o auxílio de um método numérico.

23. Uma das dificuldades do método de Newton está na possibilidade de uma aproximação x_k ser tal que $f'(x_k) = 0$. Uma modificação do algoritmo original para prever estes casos consiste em: dado λ um número positivo próximo de zero e supondo $| f'(x_0) | \geq \lambda$, a sequência x_k é gerada através de: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/FL, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$ onde $FL = \begin{cases} f'(x_k), & \text{se } | f'(x_k) | > \lambda \\ f'(x_w), & \text{caso contrário} \end{cases}$
onde x_w é a última aproximação obtida tal que $| f'(x_w) | \geq \lambda$.
Pede-se:
(a) baseado no algoritmo de Newton, escreva um algoritmo para este método;
(b) aplique este método à resolução da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$, com $x_0 = -1.275, \quad \lambda = 0.05$ e $\varepsilon = 0.05$.

24. Seja $f(x) = x\exp(-x) - \exp(-3)$.
(a) verifique gráfica e analiticamente que $f(x)$ possui um zero no intervalo $(0, 1)$;
(b) justifique teoricamente o comportamento da sequência colocada a seguir, gerada pelo método de Newton para o cálculo zero de f em $(0, 1)$, com $x_0 = 0.9$ e precisão $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$.

$$\begin{array}{lll} x_0 = 0.9 & x_5 = -3.4962 & x_{10} = -0.3041 \\ x_1 = -6.8754 & x_6 = -2.7182 & x_{11} = 0.0427 \\ x_2 = -6.0024 & x_7 = -1.9863 & x_{12} = 0.0440 \\ x_3 = -5.1452 & x_8 = -1.3189 & x_{13} = 0.0480 \\ x_4 = -4.3079 & x_9 = -0.7444 & \end{array}$$

Referências

[1] ATKINSON, K.: Elementary Numerical Analysis. Second edition, John Wiley & Sons (1993).

[2] CAMPOS, F. F.: Algoritmos Numéricos. Editora LTC (2007).

[3] FRANCO, N. B.: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2006).

[4] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L.: Cálculo Numérico, aspectos teóricos e práticos. Pearson Makron Books (1997).

[5] SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M.: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2003).