MS 211 - LISTA DE EXERCICIOS No. 3

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

---

obs.: nos exercícios abaixo, as matrizes e os vetores são dados na forma como são representados no MatLab. Por exemplo a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ *no MatLab seria escrita como:* $A = [3\ 5\ 7;\ 2\ 6\ 8\ ]$.
Observe que a ordem de entrada é por linhas e cada linha é separada da seguinte por ponto e vírgula.

---

1. Resolva o sistema linear $Ax = b$ abaixo, com $A : 4 \times 4$, utilizando o método da eliminação de Gauss: $A = [2\ 2\ 1\ 1;\ 1\ -1\ 2\ -1;\ 3\ 2\ -3\ -2;\ 4\ 3\ 2\ 1]$ e $b = [7;\ 1;\ 4;\ 12]$.

2. Analise os sistemas lineares abaixo com relação ao número de soluções, usando o método da Eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial. (Trabalhe com três casas decimais).
a) $Ax = b$, $A : 4 \times 4$, $A = [3\ \ -2\ \ 5\ \ 1;\ \ -6\ \ 4\ \ -8\ \ 1;\ \ 9\ \ -6\ \ 19\ \ 1;\ \ 6\ \ -4\ \ -6\ \ 15]$, $b = [7;\ \ -9;\ \ 23;\ \ 11]$;
b) $Ax = b$, $A : 3 \times 3$, $A = [0.25\ \ 0.36\ \ 0.12;\ \ 0.112\ \ 0.16\ \ 0.24;\ \ 0.147\ \ 0.21\ \ 0.25]$, $b = [7;\ 8;\ 9]$;
c) $Ax = b$, $A : 3 \times 3$, $A = [2\ \ 2\ \ 1\ \ 1;\ 1\ \ -1\ \ 2\ \ -1;\ \ 3\ \ 2\ \ -3\ \ -2;\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]$, $b = [7\ \ 1\ \ 14\ \ 12]$

3. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde: $A = [4\ \ -1\ \ 2;\ 2\ \ 0\ 1;\ -1\ \ 1\ w]$, e $b = [2; 5; r]$.
(a) Aplique o método da eliminação de Gauss sem estratégia de pivoteamento parcial deixando os valores em função de w e r.
(b) Para quais valores de w e r o sistema linear $Ax = b$:
(i) admite infinitas soluções; *(ii)* admite solução única. *(ii)* não admite solução.
Justifique.

4. Verifique que a matriz inversa de $A : n \times n$, denotada por A^{-1}, pode ser obtida através da resolução de n sistemas lineares através da fatoração LU. Neste caso, por que é conveniente o uso da fatoração LU ao invés do processo de eliminação de Gauss? É possível detectar se a matriz é ou não inversível?

5. Considere as matrizes $A = [1\ -2\ -3;\ \ 4\ -2\ \ 3;\ \ 2\ \ 4\ \ 2]$ e $B = [1\ -2\ -3;\ \ 4\ -2\ \ 3;\ \ 2\ \ 2\ \ 8]$. Obtenha as inversas destas matrizes usando o procedimento do exercício anterior.

6. Justifique se for verdadeira ou dê contra–exemplo se for falsa a afirmação: "Dada uma matriz $A : n \times n$, sua fatoração LU, obtida com estratégia de pivoteamento parcial, é tal que todos os elementos da matriz L têm módulo menor ou igual a 1".

7. Demonstrar que, se no início da etapa k do processo da eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial, a escolha do pivô resultar que pivô $= 0$, então $\det(A) = 0$ e a matriz A não é inversível. Dê exemplos com esta situação.

8. Calcule a fatoração LU de A, se possível: $A = [1\ 1\ 1;\ 2\ 1\ -1;\ 3\ 2\ 0]$.

9. Verifique que $|\det(A)| = |\det(U)|$, onde U é a matriz triangular superior obtida após o processo da eliminação de Gauss ou fatoração LU. Use este procedimento para obter o determinante das matrizes do exercício 5.

10. Considere a matriz: $A = [(x-1)\ \ (x-1)\ \ (x-1);\quad (x-1)\ \ 1\ \ 2;\quad (x-1)\ \ 1\ \ -2]$ e o vetor $b = [m;\ \ 3;\ \ 5]$. Pede–se:
a) Encontre o conjunto solução da equação: $\det(A) = 0$;
b) Utilizando o maior valor de x encontrado no item anterior, encontre o valor de m para que o sistema linear tenha infinitas soluções. (Use o processo da eliminação de Gauss).

11. Seja $Ax = b$ um sistema $n \times n$ com matriz tridiagonal ($a_{ij} = 0$ se $\mid i - j \mid > 1$).
a) Escreva um algoritmo para resolver sistemas com matrizes A com esta estrutura através da Eliminação de Gauss (sem pivoteamento parcial), tirando proveito da estrutura especial da matriz A;
b) Teste seu algoritmo com o sistema (faça $n = 5$):

$$\begin{cases} 2x_1 - & x_2 & = & 1 \\ -x_{i-1} + & 2x_i - x_{i+1} & = & 0, \quad i = 1, \cdots, (n-1) \\ & -x_{n-1} + 2x_n & = & 0 \end{cases}$$

12. Resolva o sistema linear abaixo através da fatoração LU com estratégia de pivoteamento parcial. Discuta e existência ou não de soluções.
a) $A = [1\ \ 1\ \ 1\ \ ; 2\ \ 1\ \ -1\ \ ; 3\ \ 2\ \ 0]$ e $b = [4; -1; 3]$
Se sua calculadora resolve sistemas lineares, use este exemplo para analisar a resposta obtida. Resolva este sistema usando o MatLab e analise a resposta obtida.
b) Idem ao anterior com a mesma matriz A e vetor $b = [4; -1; 6]$.

13. Resolva o sistema linear abaixo através da fatoração LU com estratégia de pivoteamento parcial:
$A = [1\ \ -2\ \ 7\ \ 2;\ 2\ \ 5\ \ -3\ \ 1;\ 9\ \ -6\ \ 4\ \ 1;\ 4\ \ -3\ \ -6\ \ 7]$ e b $= [-18;\ 31;\ 35;\ 15]$

14. Considere o sistema linear: $Ax = b$ onde $A = [1\ \ 2\ \ 1;\ 2\ \ 3\ 1;\ 3\ \ 5\ 2]$ e $b = [3;\ 5;\ 1]$. Verifique usando a eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial que este sistema não admite solução. Qual será o comportamento de Gauss-Seidel?
Faça a interpretação geométrica de Gauss-Seidel em sistemas 2×2 que não tenham solução ou quando admitem infinitas soluções.

15. *a)* Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema $Ax = b$ onde $A = [2\ \ 5;\ 3\ \ 1]$ e $b = [-3;\ 2]$;
b) repita o item *a)* permutando as equações do sistema e compare os resultados obtidos.

16. Em cada sistema linear abaixo, verifique se o critério das linhas é satisfeito, e resolva por Gauss–Seidel, se possível:
a) $A = [10\ \ 1\ \ 1;\ \ 1\ \ 10\ \ 1;\ \ 1\ \ 1\ \ 10]$ e $b = [12;\ \ 12;\ \ 12]$;
b) $A = [4\ \ -1\ \ 0\ \ 0;\ -1\ \ 4\ \ -1\ \ 0;\ 0\ \ -1\ \ 4\ \ -1;\ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 4]$ e $b = [1;\ 1;\ 1;\ 1]$.

17. a) Considere o sistema linear: $Ax = b$, onde $A = [k\ 3\ 1; k\ 6\ 1; 1\ 6\ 7]$ e $b = [1; 2; 3]$.
a) Usando o critério de Sassenfeld, verifique quais os valores positivos de k para os quais existe garantia de convergência do método de Gauss–Seidel;
b) Escolha o menor número inteiro, positivo para k e faça duas iterações de Gauss-Seidel.

18. Considere o sistema linear: $Ax = b$, com $A = [1\ 1\ 4\ 1; 0\ 1\ 2\ 4; 2\ 4\ -1\ 0; 5\ 1\ 1\ 2]$ e $b = [2; 9; 2; 0]$.

    a) Monte o esquema iterativo para o método de Gauss–Seidel de modo que a convergência do processo seja garantida. Justifique.

b) Obtenha a aproximação $x^{(2)}$ através deste método, e realize um teste de parada usando tolerância 10^{-2}.
c) Repita os itens *a)* e *b)* para o método de Gauss–Jacobi.

19. Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades(u) de vitamina A, 180 u de vitamina B, 140 u de vitamina C, 180 u de vitamina D e 350 u de vitamina E. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados 5 alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se que:
(i) o alimento I tem 1 u de vitamina A, 10 u de vitamina B, 1 u de vitamina C, 2 u de vitamina D e 2 u de vitamina E.
(ii) o alimento II tem 9 u de vitamina A, 1 u de B, 0 u de C, 1 u de D e 1 u de E.
(iii) o alimento III tem 2 u de vitamina A, 2 u de B, 5 u de C, 1 u de D e 2 u de E.
(iv) o alimento IV tem 1 u de A, 1 u de B, 1 u de C, 2 u de D e 13 u de E.
(v) o alimento V tem 1 u de A, 1 u de B, 1 u de C, 9 u de D e 2 u de E.
Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

Exercícios Extra

1. Considere um sistema linear $Ax = b$, onde A é uma matriz $n \times n$, e sua fatoração LU. Responda se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.
a) Usando a estratégia de pivoteamento parcial garante-se que todos os elementos (em módulo) da matriz L são menores ou iguais a 1.
(*b)* Se a matiz A é não inversível, então $det(L) = 0$.

2. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde: $A = [5\ -1\ w;\ 2\ -4\ 1;\ -1\ 1\ w]$ e $b = [8;\ 9;\ 3]$.
a) Enuncie o critério das linhas. Para quais valores de w este critério é satisfeito? Justifique.
b) Faça $w = 3$. Monte o esquema iterativo para o método de Gauss-Seidel.

3. Um possível teste de parada para um método iterativo é testar se o residuo: $r_k = Ax^{(k)} - b$ está próximo de zero. Como realizar computacionalmente este teste?

4. Considere a matriz $A = [2\quad 3\quad 8;\quad 4\quad 1\quad 2;\quad 1\quad -5\quad 3]$. Calcule os fatores L e U de A usando estretégia de pivoteamento parcial. Explicite: todas as passagens realizadas e ao final, as matrizes L, U e as permutações realizadas.
b) Escolha o vetor b de modo que o sistema linear $Ax = b$ tenha como solução a 2a. coluna da matriz inversa de A. Obtenha esta coluna usando a fatoração LU obtida no item (a).

5. Um terreno deve ser adubado acrescentando a cada $10m^2$, $140g$ de nitrato, $190g$ de fosfato e $205g$ de potássio. Dispoõe–se de 4 qualidades de adubo com as seguintes características:

adubo	custo por kg	qte. de nitrato por kg	qte. de fosfato por kg	qte. de potássio por kg
I	$R\$ \, 50,00$	10g	10g	100g
II	$R\$ \, 60,00$	10g	100g	30g
III	$R\$ \, 50,00$	50g	20g	20g
IV	$R\$ \, 50,00$	120g	40g	35g

Quanto de cada adubo deverá ser misturado para conseguir o efeito desejado se o total a ser gasto é $R\$ \, 540,00$ a cada $10m^2$ de terreno adubado?