MS 211 - LISTA DE EXERCICIOS No. 3

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

2o.semestre de 2012

1.)Os exercícios sugeridos nesta lista foram, em sua maioria, extraídos dos livros: Cálculo Numérico de Márcia A. Gomes-Ruggiero, Vera L. Rocha Lopes e Métodos Numéricos de Cristina Cunha.
2.)nos exercícios, a notação para as matrizes e os vetores são dados na forma como são representados no MatLab. Por exemplo a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ no MatLab seria escrita como: $A = [3\ 5\ 7;\ 2\ 6\ 8\ ]$. Observe que a ordem de entrada é por linhas e cada linha é separada da seguinte por ponto e vírgula.

---

1. *Sistemas Triangulares.* Uma matriz $A : n \times n$ é triangular inferior (superior) se $a_{ij} = 0, i < j$, $(a_{ij} = 0, i > j)$.
   a) Escreva um algoritmo para a resolução de um sistema linear triangular inferior e outro para a resolução de um sistema linear triangular superior. Inclua nos seus algoritmos, testes para evitar divisão por zero.
   b) Se ocorrer um elemento nulo na diagonal de uma matriz triangular, A, o que se pode afirmar sobre a existência e unicidade da solução do sistema $Ax = b$?
   c) A partir do algoritmo escrito no item (a), e considerando o sistema triangular inferior, $Ax = b$, verifique que:
   c.1) para obter o valor da variável x_k, são realizadas: $k-1$ somas, $k-1$ multiplicações (para o somatório) e para obter o valor final da variável: uma divisão e dependendo de como escreveu o algoritmo, mais uma soma. Isto porque a variável que representa o somatório pode ser inicializada com zero ou com o valor de b_k. Portanto o total de operações para resolver um sistema linear triangular inferior é n^2 ou $n^2 + n$;
   c.2) verifique que um raciocínio semelhante permite concluir o mesmo número de operações se o sistema for triangular superior;
   Observação final: ainda que na forma como escreveu o algoritmo o número total tenha dado $n^2 + n$, se n é grande o termo n será muito pequeno relativamente à n^2 e como o coeficiente de n^2 é 1, é comum afirmar que a resolução de um sistema triangular requer uma ordem de n^2 operações.

2. Escreva um algoritmo para obter a solução de um sistema linear através do processo da Eliminação de Gauss sem pivoteamento parcial. Repita o exercício considerando a estratégia de pivoteamento parcial.

3. Resolva o sistema linear $Ax = b$ abaixo, com $A : 4 \times 4$, utilizando o método da eliminação de Gauss: $A = [2\ 2\ 1\ 1;\ 1\ -1\ 2\ -1;\ 3\ 2\ -3\ -2;\ 4\ 3\ 2\ 1]$ e $b = [7;\ 1;\ 4;\ 12]$.

4. *a)* Resolva os sistemas lineares abaixo. Trabalhe com 3 casas decimais e a cada operação, arredonde o resultado. Obtida a solução $\bar{x}$, realize o produto $A\bar{x}$ e compare com o vetor b.
   i) $Ax = b$, $A : 4 \times 4$, $A = [3\ \ -2\ \ 5\ \ 1;\ \ -6\ \ 4\ \ -8\ \ 1;\ \ 9\ \ -6\ \ 19\ \ 1;\ \ 6\ \ -4\ \ -6\ \ 15]$, $b = [7;\ \ -9;\ \ 23;\ \ 11]$;
   ii) $Ax = b$, $A : 3 \times 3$, $A = [0.25\ \ 0.36\ \ 0.12;\ \ 0.112\ \ 0.16\ \ 0.24;\ \ 0.147\ \ 0.21\ \ 0.25]$, $b = [7;\ 8;\ 9]$;
   iii) $Ax = b$, $A : 3 \times 3$, $A = [2\ \ 2\ \ 1\ \ 1;\ 1\ \ -1\ \ 2\ \ -1;\ \ 3\ \ 2\ \ -3\ \ -2;\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]$, $b = [7\ \ 1\ \ 14\ \ 12]$.
   b) Sabendo que a matriz do sistema (i) é não inversível, justifique o resultado obtido por sua resolução.

c) Compare as soluções obtidas pela sua resolução, com as que que foram usando o MatLab, através do comando `A\b`:
sistema (i): $\bar{x} = [inf; inf; 1; 1]$
sistema (ii): $\bar{x} = [653.8462; -442.3077; 23.0769]$
sistema (iii): $\bar{x} = [-5.6667; 12; 4.3333; -10.0000]$

5. Resolva os sistemas abaixo, com e sem estratégia de pivoteamento parcial, usando quatro dígitos e arredondamento. Qual técnica deu melhores resultados?
a) $A = [58.09\ 1.003;\ 321.8\ 5.550]$ e $b = [68.12;\ 377.3]$;
b) $A = [321.8\ 5.550;\ 100.3\ 5809]$ e $b = [377.3;\ 6812]$.

6. Resolva o sistema linear abaixo através da fatoração LU com estratégia de pivoteamento parcial. Discuta e existência ou não de soluções.
a) $A = [1\ \ 1\ \ 1\ \ ; 2\ \ 1\ \ -1\ \ ; 3\ \ 2\ \ 0]$ e $b = [4; -1; 3]$
Se sua calculadora resolve sistemas lineares, use este exemplo para analisar a resposta obtida. No MatLab foi obtida a solução: $x = [0.3333; 1.; 2.6667]$ e o aviso *Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.* E em uma calculadora, empregando o programa interno para resolução de sistemas lineares, a solução obtida foi: $x = [0.2857; 1.0714; 2.6429]$, sem nenhum aviso. (Aqui os resultados foram mostrados com apenas 4 casas decimais).
Compare com a sua resolução e com a solução obtida por sua calculadora.
b) Idem ao anterior com a mesma matriz A e vetor $b = [4; -1; 6]$.
Neste caso o MatLab apresentou como resultado:
$x = 10^{16} * [1.8014; -2.7022; 0.9007]$ e o aviso conforme colocado acima. Obs.: as entradas da diagonal da matriz U foram: 3, 0.3333 e $-3.3 * 10^{-16}$.
Na calculadora: $x = [0.7143; 1.4286; 2.8671]$, sem qualquer tipo de aviso.

7. Verifique que resolver $AX = B$ onde $A : n \times n$, $X : n \times m$ e $B : n \times m$ é o mesmo que resolver m sistemas do tipo $Ax = b$, onde a matriz A é sempre a mesma e o vetor b se modifica em cada sistema linear. Por quê são m sistemas lineares? Quais são os vetores b de cada sistema? Qual método é mais indicado: eliminação de Gauss ou fatoração LU? (os dois processos com estratégia de pivoteamento parcial) Por que?

8. *Inversa de uma matriz*:
a) Usando o exercício anterior, verifique que a inversa de uma matriz $A : n \times n$, A^{-1}, pode ser obtida através da resolução de n sistemas lineares. Indique quais são estes sistemas: matriz de coeficientes e vetor constante do lado direito e interprete a solução de cada sistema.
b) Obtenha a inversa das matrizes:
$A = [1\ -2\ -3;\ \ 4\ -2\ \ 3;\ \ 2\ \ 4\ \ 2]$; $B = [1\ -2\ -3;\ \ 4\ -2\ \ 3;\ \ 2\ \ 2\ \ 8]$ e $C = [1\ 12\ 3;\ 2\ 4\ 16;\ 3\ 15\ 7]$.
Respostas (obtidas usando comando `inv` do MatLab):
$A^{-1} = [0.22220.11110.1667; 0.0278 - 0.11110.2083; -0.27780.1111 - 0.0833]$;
$B^{-1} = [3.6667 - 1.66672.0000; 4.3333 - 2.33332.5000; -2.00001.0000 - 1.0000]$;
$C^{-1} = 10^{15} * [-6.7554 - 6.75546.7554; 0.37530.3753 - 0.3753; 0.75060.7506 - 0.7506]$ Para esta matriz o MatLab enviou um aviso: *Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.*. Justifique seu resultado comparado ao do MatLab e analise o aviso enviado pelo MatLab, lembrando que uma matriz singular é o mesmo que matriz não inversível.

9. *a)* Considerando que o processo da eliminação de Gauss realiza uma ordem $\frac{2}{3}n^3$ operações e que a resolução de um sistema triangular requer uma ordem de n^2 operações, concluímos que a obtenção da inversa na forma descrita no item(a) do exercício anterior, requer uma ordem de .... operações. Complete e Justifique.

10. Supor que são dados: $A : n \times n$, $d : n \times 1$ e $c : n \times 1$, e o objetivo é calcular: $z = c^t A^{-1} d$. Na expressão de z a dificuldade está no cálculo de $s = A^{-1}d$. Analise os dois processos para obter s: *(i)* invertendo a matriz A e calculando $s = A^{-1}d$ e
(ii) resolvendo o sistema linear $As = d$. Qual das duas formas deve ser escolhida de modo que z seja obtido de modo econômico? Conclusão: é melhor resolver um sistema linear do que inverter uma matriz? Justifique!

11. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde: $A = [4 \ \ -1 \ \ 2; \ 2 \ \ 0 \ 1; \ -1 \ \ 1 \ w]$, e $b = [2; 5; r]$.
(a) Aplique o método da eliminação de Gauss sem estratégia de pivoteamento parcial deixando os valores em função de w e r.
(b) Para quais valores de w e r o sistema linear $Ax = b$:
(i) admite infinitas soluções; *(ii)* admite solução única. *(ii)* não admite solução. Justifique.

12. Justifique se for verdadeira ou dê contra–exemplo se for falsa a afirmação: "Dada uma matriz $A : n \times n$, sua fatoração LU, obtida com estratégia de pivoteamento parcial, é tal que todos os elementos da matriz L têm módulo menor ou igual a 1".

13. Demonstrar que, se no início da etapa k do processo da eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial, a escolha do pivô resultar que pivô $= 0$, então $\det(A) = 0$ e a matriz A não é inversível. Dê exemplos com esta situação.

14. Calcule a fatoração LU de A: $A = [1 \ 1 \ 1; \ 2 \ 1 \ -1; \ 3 \ 2 \ 0]$. O que se pode afirmar sobre a matriz A?

15. *Cálculo do determinante.* Da propriedade de determinantes sabemos que as operações elementares realizadas sobre as linhas de A, alteram o determinante de A, $\det(A)$, da seguinte forma:
(i): trocar duas linhas: determinante da matriz resultante troca de sinal;
(ii): multiplicar uma linha por uma constante não nula: determinante fica multiplicado por esta constante;
(iii): adicionar a uma linha um múltiplo de outra linha: determinante não se altera.
No processo de eliminação de Gauss realizamos uma sequência de operações do tipo (iii). A operação do tipo (i) pode ocorrer se o processo envolver pivoteamento parcial. Ao final do processo de Gauss, obtemos a matriz triangular superior U.
a) Podemos afirmar que $|\det(A)| = |\det(U)|$? *b)* Considerando a fatoração LU de A (sem pivoteamento), teremos: $A = LU$. A afirmação do item (a) é verdadeira? Justifique.
c) Considerando agora a eliminação de Gauss com pivoteamento parcial, obtemos: $PA = LU$, onde P representa as permutações realizadas sobre as linhas de A.
c.1) sabendo que P é uma permutação das linhas da matriz identidade, podemos afirmar que $|\det(P)| = 1$. (V ou F)? justifique.
c.2) se $PA = LU$, teremos $|\det(A)|= |\det(U)$? Justifique.
d) Obtenha o determinante das matrizes do exercício (6b).

16. Considere a matriz: $A = [(x-1) \ \ (x-1) \ \ (x-1); \quad (x-1) \ \ 1 \ \ 2; \quad (x-1) \ \ 1 \ \ -2]$ e o vetor $b = [m; \ 3; \ 5]$. Pede–se:
a) Encontre o conjunto solução da equação: $\det(A) = 0$;
b) Utilizando o maior valor de x encontrado no item anterior, encontre o valor de m para que o sistema linear tenha infinitas soluções. (Use o processo da eliminação de Gauss).

17. Seja $Ax = b$ um sistema $n \times n$ com matriz tridiagonal ($a_{ij} = 0$ se $\mid i - j \mid > 1$).
a) Escreva um algoritmo para resolver sistemas com matrizes A com esta estrutura através da

Eliminação de Gauss (sem pivoteamento parcial), tirando proveito da estrutura especial da matriz A;
b) Teste seu algoritmo com o sistema (faça $n = 5$):

$$\begin{cases} 2x_1 - & x_2 & = & 1 \\ -x_{i-1} + & 2x_i - x_{i+1} & = & 0, \quad i = 2, \ldots, (n-1) \\ & -x_{n-1} + 2x_n & = & 0 \end{cases}$$

18. Considere o sistema linear: $Ax = b$ onde $A = [1 \;\; 2 \;\; 1;\; 2 \;\; 3 \; 1;\; 3 \;\; 5 \; 2]$ e $b = [3;\; 5;\; 1]$. Verifique usando a eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial que este sistema não admite solução. Qual será o comportamento de Gauss-Seidel?
Faça a interpretação geométrica de Gauss-Seidel em sistemas 2×2 que não tenham solução ou quando admitem infinitas soluções.

19. *a)* Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema $Ax = b$ onde $A = [2 \;\; 5;\; 3 \;\; 1]$ e $b = [-3;\; 2]$;
b) repita o item *a)* permutando as equações do sistema e compare os resultados obtidos.

20. Em cada sistema linear abaixo, verifique se o critério das linhas é satisfeito, e resolva por Gauss–Seidel, se possível:
a) $A = [10 \;\; 1 \;\; 1;\;\; 1 \;\; 10 \;\; 1;\;\; 1 \;\; 1 \;\; 10]$ e $b = [12;\;\; 12;\;\; 12]$;
b) $A = [4 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 0;\; -1 \;\; 4 \;\; -1 \;\; 0;\; 0 \;\; -1 \;\; 4 \;\; -1;\; 0 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 4]$ e $b = [1;\; 1;\; 1;\; 1]$.

21. a) Considere o sistema linear: $Ax = b$, onde $A = [k\; 3\; 1; k\; 7\; 1; 1\; 6\; 8]$ e $b = [1; 2; 3]$.
a) Usando o critério da linhas, verifique quais os valores positivos de k para os quais existe garantia de convergência do método de Gauss–Seidel.
b) Escolha o menor número inteiro, positivo para k e faça duas iterações de Gauss-Seidel.

22. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde: $A = [1\; 0.2\; 10;\; 10\; 2\; 5;\; 8\; 20\; 1]$ e $b = [12.2\; 27\; 37]$.
a) Resolva este sistema através do método da Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.(Trabalhe com 4 casas decimais).
b) Monte um esquema iterativo para o método de Gauss-Seidel e outro para o método de Gauss-Jacobi de modo que a convergência para a solução esteja garantida. Justifique. (não é preciso realizar as iterações destes métodos).
c) Quais os testes de parada adequados para os métodos de Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi?

23. Um possível teste de parada para um método iterativo é testar se o residuo: $r_k = Ax^{(k)} - b$ está próximo de zero. Como realizar computacionalmente este teste?