MS 211 Cálculo Numérico

Primeiro Semestre de 2013

Lista de Exercícios MS211
Tópico 3. "Resolução de Sistemas Lineares."

Exercício 1.

Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método da Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

Exercício 2.

Analise os sistemas lineares abaixo com relação ao número de soluções, usando o método da Eliminação de Gauss. Trabalhe com três casas decimais.

(a) $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ -6x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -9 \\ 9x_1 - 6x_2 + 19x_3 + x_4 = 23 \\ 6x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 15x_4 = 11 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 0.252x_1 + 0.36x_2 + 0.12x_3 = 7 \\ 0.112x_1 + 0.16x_2 + 0.24x_3 = 8 \\ 0.147x_1 + 0.21x_2 + 0.25x_3 = 9 \end{cases}$$

Exercício 3.

Escreva um algorítmo para a resolução de um sitema linear triangular:

(a) Inferior.

(b) Superior

(c) Verifique que o número de operações efetuadas para resolver um sistema linear triangular inferior é o mesmo que para multiplicar uma matriz triangular por um vetor.

Exercício 4.

Uma estratégia alternativa para o pivoteamento parcial no metódo de Eliminação de Gauss é relaxar a exigência de que o pivô em cada passo da eliminação seja o maior elemento em módulo. Assim, o critério para a escolha do pivô passa a ser

$$|a_{kk}| \geq \mu \max_{i=k,n} |a_{ik}|,$$

onde $\mu \in [0,1]$. Dessa forma, procura-se manter um compromisso entre a precisão e a esparcidade (observe que para $\mu = 1$ tem-se a estratégia de pivoteamento parcial estudada). Aplique o método da Eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento μ-parcial ao sistema linear abaixo. Considere $\mu = 0.5$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exercício 5.

Descreva como o processo de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial pode ser usado para obter o determinante de uma matriz.

Exercício 6.

Escreva um algorítmo para obter a solução de um sitema linear via Eliminação de Gauss sem técnica de pivoteamento. Faça o mesmo condirando agora o pivoteamento parcial.

Exercício 7.

Seja $Ax = b$ um sistema $n \times n$ com matriz tridiagonal ($a_{ij} = 0$ se $|i - j| > 1$).

(a) Escreva um algorítmo para resolver o sistema através da Eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial de modo que a estrutura especial da matriz A seja explorada.

(b) Compare o custo de resolvê-lo por Eliminação de Gauss via algorítmo tradicional, com o de resolvê-lo pelo algorítmo do item (a). Vale destacar que o "custo" nada mais é do que o níumero de operações efetuadas.

Exercício 8.

Sejam as matrizes $A = [2\ 1\ 3; 1\ 4\ 0; 0\ 1\ 3]$ e $B = [1\ 1\ 1; 2\ 1\ -1; 3\ 2\ 0]$, obtenha os fatores L e U de A e B, respectivamente, caso eles existam.

Exercício 9.

Analisar cada matriz a seguir do ponto de vista da existência e da unicidade da fatoração LU: $A = [3\ 5\ 7; 2\ 1\ 4; 0\ 0\ 8]$, $B = [0\ 1\ 2; 1\ 5\ 7; 2\ 9\ 3]$, $C = [1\ 9\ 5\ 3; 0\ 0\ 2\ -1; 0\ 0\ 8\ 3; 0\ 0\ 2\ 4]$

Exercício 10.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A = [\alpha\ 2\ 0; 1\ \alpha\ 1; 0\ 1\ \alpha]$:

(a) Exiba os fatores L e U de A e determine os valores de α para os quais a fatoração LU de A não existe. Justifique sua resposta.

(b) Usando a fatoração encontrada no item anterior, para que valores de α é possível garantir que esta fatoração é única?

Exercício 11.

Mostre que a matriz $A = [2\ 2\ 1; 1\ 1\ 1; 3\ 2\ 1]$ é inversível e que A não admite fatoração LU sem pivoteamento.

Exercício 12.

Utilizando fatoração LU com pivoteamento parcial, resolva o sistema linear sendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3.5 & 1 & 7.5 \\ 1.4 & 2.7 & 5.5 & 12 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 21.6 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Exercício 13.

Resolva os sistemas abaixo, com e sem pivoteamento, usando quatro dígitos e aritmética com arredondamento. Qual técnica deu melhores resultados?

(a) $A = [58.09\ 1.003; 321.8\ 5.550]$; $b = [68.12; 377.3]$

(b) $A = [321.8\ 5.550; 100.3\ 5809]$; $b = [377.3; 6812]$

Exercício 14.

Seja P uma matriz de permutação tal que $PA = LU$. Como usar estes fatores para resolver o sistema linar $A^t x = b$?

Exercício 15.

Sobre o teorema da existência e unicidade da fatoração LU: se uma submatriz principal dominante de ordem k for singular, podemos afirmar que a matriz A não tem fatoração LU? Fundamente sua resposta teoricamente e com exemplos.

Exercício 16.

Descreva como obter a inversa de uma matriz A, de ordem n, através da resolução de n sistemas lineares. A fatoração LU com pivoteamento parcial é indicada apra esta resolução? Qual o número total de operações necessárias para obter A^{-1}?

Exercício 17.

Elabore um algoritmo de inversão da matriz A com base na decomposição LU de A. Qual é o esforço computacional para a inversão de A?

Exercício 18.

Conte o número de operações necessárias à resolução de um sistema linear com m equações e n incógnitas usando o método de decomposição LU. Com base neste esforço computacional, este método é competitivo com a Eliminação Gaussiana?

Exercício 19.

Em cada caso:

(a) verifique se o critério de Sassenfeld é satisfeito;

(b) resolva por Gauss-Seidel, se possível:

$$A_1 = [10\ 1\ 1; 1\ 10\ 1; 1\ 1\ 10];\ \ b_1 = [12; 12; 12]$$

$$A_2 = [4\ \ -1\ 0\ 0; -1\ 4\ \ -1\ 0; 0\ \ -1\ 4\ \ -1; 0\ 0\ \ -1\ 4];\ \ b_2 = [1; 1; 1; 1]$$

Exercício 20.

(a) Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema $Ax = b$ onde $A = [2\ 5; 3\ 1]$ e $b = [-3; 2]$

(b) Repita o item anterior permutando as equações do sistema e compare os resultados obtidos.

Exercício 21.

Considere o sistema linear tal que $A = [1\ 2\ 1; 2\ 3\ 1; 3\ 5\ 2]$ e $b = [3; 5; 1]$. Verifique usando Eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial que este sistema não admite solução. Qual será o comportamento do método de Gauss-Seidel?

Exercício 22.

Um possível teste de parada para um método iterativo é testar se $Ax^{(k)} - b$ estpa próximo de zero, quando então $x^{(k)}$ será escolhido como aproximação da solução $x*$ do sistema. Como realizar computacionalmente este teste?

Exercício 23.

Usando o critério de Sassenfeld, verifique para que valores positivos de k se tem garantia de que o método de Gauss-Seidel vai gerar uma sequencia convergente para a solução do sistema:

$$\begin{cases} kx_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ kx_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & = & 3 \end{cases}$$