MS 211 – 2º sem. 2014

LISTA DE EXERCICIOS No. 3

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

1. Analise os sistemas lineares abaixo com relação ao número de soluções, usando o método da Eliminação de Gauss. (Trabalhe com três casas decimais).

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ -6x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -9 \\ 9x_1 - 6x_2 + 19x_3 + x_4 = 23 \\ 6x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 15x_4 = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0.25x_1 + 0.36x_2 + 0.12x_3 = 7 \\ 0.11x_1 + 0.16x_2 + 0.24x_3 = 8 \\ 0.14x_1 + 0.21x_2 + 0.25x_3 = 9 \end{cases}$$

2. Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método da eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

3. Seja $Ax = b$ um sistema $n \times n$ com matriz tridiagonal ($a_{ij} = 0$ se $\mid i - j \mid > 1$).

   (a) Escreva um algoritmo para resolver tal sistema através da Eliminação de Gauss, tirando proveito da estrutura especial da matriz A.

   (b) Teste seus resultados com o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 0, \quad i = 1, \cdots, (n-1) \\ -x_{n-1} + 2x_n = 0 \end{cases}$$

   para $n = 5$.

4. O cálculo do determinante de matrizes quadradas pode ser feito usando o método da eliminação de Gauss.

   (a) deduza este processo;

   (b) aplique-o no cálculo do determinante das matrizes dos sistemas dos exercícios (1) a (3).

5. Calcule a fatoração LU de A se possível: $A = [1\ \ 1\ \ 1\ \ ;2\ \ 1\ \ -1\ \ ;3\ \ 2\ \ 0]$

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & w \end{bmatrix}$.

   (a) Obtenha os fatores L e U de A, sem estratégia de pivoteamento parcial.

   (b) Usando o item (a), atribua um valor para w e construa um vetor $b \in I\!R^3$, de modo que o sistema $Ax = b$ tenha infinitas soluções. Justifique.

7. Resolva o sistema linear abaixo através da fatoração LU com estratégia de pivoteamento parcial:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -18 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 31 \\ 9x_1 - 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 35 \\ 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 15 \end{cases}$$

8. (a) Mostre que resolver $AX = B$ onde $A : n \times n$, $X : n \times m$ e $B : n \times m$ é o mesmo que resolver m sistemas do tipo $Ax = b$, onde a matriz A é sempre a mesma e o vetor b se modifica em cada sistema linear. Por quê são m sistemas lineares? Quais são os vetores b de cada sistema? Qual método é mais indicado: eliminação de Gauss ou fatoração LU? (os dois processos com estratégia de pivoteamento parcial) Por que?
(b) Considerando a matriz do exercício anterior, faça $B = [26\ \ 4; -7\ \ 7; 37\ \ -22; 8\ \ 9]$.
(c) Usando o item (a), verifique que A^{-1} pode ser obtida através da resolução de n sistemas lineares. Aplique este processo para obter a inversa da matriz do exercício anterior.

9. Em cada sistema linear abaixo, verifique se o critério das linhas é satisfeito, e resolva por Gauss–Seidel, se possível:
(a) $A = [10\ \ 1\ \ 1;\ \ 1\ \ 10\ \ 1;\ \ 1\ \ 1\ \ 10]$ e $b = [12;\ \ 12;\ \ 12]$;
(b) $A = [4\ \ -1\ \ 0\ \ 0;\ -1\ \ 4\ \ -1\ \ 0;\ 0\ \ -1\ \ 4\ \ -1;\ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 4]$ e $b = [1;\ 1;\ 1;\ 1]$.

10. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 & w \\ -1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ w & -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Para que valores de w a matriz A satisfaz o critério das linhas?
(b)Tomando $w = 0$ e $x^{(0)} = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$, obtenha a aproximação $x^{(2)}$ pelo método de Gauss–Seidel. Neste caso, você pode afirmar que a convergência do método está garantida? Justifique.

11. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Monte o esquema iterativo para o método de Gauss-Seidel de modo que a convergência do processo seja garantida. Justifique.
(b) Obtenha a aproximação $x^{(2)}$ através método, a partir de $x^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$.
(c) Repita os itens (a) e (b) para o método de Gauss–Jacobi.

12. Considere o sistema linear: $Ax = b$ onde $A = [1\ \ 2\ \ 1;\ 2\ \ 3\ 1;\ 3\ \ 5\ 2]$ e $b = [3;\ 5;\ 1]$. Verifique usando a eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial que este sistema não admite solução. Qual será o comportamento de Gauss-Seidel? Faça a interpretação geométrica de Gauss-Seidel em sistemas 2×2 que não tenham solução ou quando admitem infinitas soluções.

13. (a) Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema $Ax = b$ onde $A = [2 \;\; 5; \; 3 \;\; 1]$ e $b = [-3; \; 2]$;
(b) Repita o item (a) permutando as equações do sistema e compare os resultados obtidos.