MS 211 – Calculo Numérico
Lista 03

Resolução de sistemas lineares: Métodos diretos e iterativos

Motivação

A atividade foi retirada de [7].

Sistemas lineares aparecem em um grande número de aplicações. Vários métodos numéricos fazem uso da resolução de um ou mais sistemas lineares em sua composição. Para mostrar uma das aplicações deste tópico, considere um problema de valor de contorno

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = x \\ x(0) = 0 \\ x(1) = -1, \end{cases} \tag{1}$$

Dividindo o intervalo $[0,\ 1]$ em n subintervalos, se fizermos a seguinte aproximação para as derivadas da função $x(t)$, podemos converter o problema em um sistema linear

$$x'(t_i) \approx \frac{x_{i-1} - x_{i+1}}{2h}$$
$$x''(t_i) \approx \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2}$$

Escreva o sistema linear correspondente e resolva, usando $n = 10$.

Solução:

Temos o seguinte sistema linear, relacionado à discretização feita, tomando $x_i = ih$, onde $h = 1/n$:

$$\begin{cases} (h^2 - 2)x_1 + (1+h)x_2 = h^3 & \text{para } i = 1 \\ (1-h)x_{i-1} + (h^2 - 2)x_i + (1+h)x_{i+1} = h^3 & \text{para } i = 2 : n-2 \\ (1-h)x_{n-2} + (h^2 - 2)x_{n-1} = (n-1)h^3 + (h+1) & \text{para } i = n-1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear correspondente usando o método de Gauss-Seidel obtemos a aproximação dada na Tabela 1:

Tabela 1: Aproximações via resolução do Sistema Linear para o PVC (1)

t_i	x_i
0.1	-0.2720
0.2	-0.4911
0.3	-0.6641
0.4	-0.7969
0.5	-0.8947
0.6	-0.9620
0.7	-1.0029
0.8	-1.0208
0.9	-1.0190

Exercício 01

Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

é invertível e que A não pode ser escrita como o produto de uma matriz triangular inferior por uma matriz triangular superior sem pivoteamento.

Exercício 02

Resolva os sistemas lineares abaixo, com e sem pivoteamento, usando três dígitos e arredondamento. Qual técnica forneceu os melhores resultados?

a) $\begin{cases} 58.09x + 1.003y = 68.12 \\ 321.8x + 5.550y = 377.3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 321.8x + 5.550y = 6812 \\ 100.3x + 5809y = 377.3 \end{cases}$

Exercício 03

Considere o sistema $Ax = b$, onde A é uma matriz $n \times n$ tridiagonal (ou seja $a_{ij} = 0$, se $|i - j| > 1$). Escreva um algoritmo que resolva este tipo de sistema, usando a Eliminação de Gauss. Quantas operações realiza seu algoritmo?

Exercício 04

Verifique que o número de operações necessárias no método da Eliminação de Gauss, sem pivoteamento parcial, é

$$\#\text{ operações} = \frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6},$$

na fase de triangularização da matriz A, e n^2 na fase de resolução do sistema triangular superior. São contadas as operações de divisão, multiplicação e soma.

Exercício 05

A matriz U da decomposição $A = LU$ pode der reescrita como $U = D\bar{U}$ onde D é uma matriz diagonal com elementos $d_i = u_{ii}$ e a matriz $\bar{U}$ possui elementos com valor 1 na diagonal.

a) Mostre que $\bar{u}_{ij} = u_{ij}/u_{ii}$;

b) Quando a decomposição $A = LD\bar{U}$ pode ser escrita como $A = LDL^\top$?

Exercício 06

Considere um sistema linear $Ax = b$ com A uma matriz 2×2 tal que

$$|a_{11}| > |a_{12}|\,,\ |a_{21}| > |a_{22}| \ \text{ e } \ |a_{11}/a_{12}| > |a_{21}/a_{22}|\,.$$

O que se pode afirmar sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel?

Exercício 07

Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Escreva um sistema linear equivalente tal que o método de Gauss-Seidel convirja.

b) Aplique o método de Gauss-Seidel para resolver o sistema modificado utilizando $x^{(0)} = (0,\ 0, 0,\ 0)^\top$ e com precisão de 0.1.

Exercício 08

Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Aplique o método de Gauss- Seidel no sistema, com $x^{(0)} = (0,\ 0)^\top$, tolerância de 0.01 e no máximo quatro iterações.

b) Repita o item anterior permutando as equações do sistema e compare os resultados. O que você concluiu?

Exercício 09

Seja o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 8 \\ 7 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

a) é possível dizer que o Método de Jacobi é convergente para este sistema?

b) E o de Gauss-Seidel?

c) Resolva o sistema utilizando o Método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (0.7,\ -1.6,\ 0.6)^\top$, tolerância de 0.01.

Referências

[1] R. Burden, J. Faires, and A. Burden, *Numerical analysis*, 8 ed., 2013.

[2] S. D. Conte and C. W. D. Boor, *Elementary numerical analysis: an algorithmic approach*, McGraw-Hill Higher Education, 1980.

[3] M. C. C. Cunha, *Métodos Numéricos*, Editora da Unicamp, 2000.

[4] G. Dahlquist and A. Björk, *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[5] N. B. Franco, *Cálculo numérico*, Pearson, 2006.

[6] C. B. Moler, *Numerical computing with MATLAB, electronic edition: The MathWorks*. `http://www.mathworks.com/moler/index_ncm.html`. último acesso em 28-01-2015.

[7] M. A. G. Ruggiero and V. L. d. R. Lopes, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*, Makron Books do Brasil, 1997.