Lista de Exercícios 3
MS211 - 2020/S1
Resolução de Sistemas Lineares

Parte A - Métodos Diretos

1. Analise o sistema linear abaixo com relação ao número de soluções, usando o método da Eliminação de Gauss.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ -6x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -9 \\ 9x_1 - 6x_2 + 19x_3 + x_4 = 23 \\ 6x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 15x_4 = 11 \end{cases}$$

2. Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método da eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

3. Seja $Ax = b$ um sistema $n \times n$ com matriz tridiagonal ($a_{ij} = 0$ se $\mid i - j \mid > 1$).

   (a) Escreva um algoritmo para resolver tal sistema através da Eliminação de Gauss, tirando proveito da estrutura especial da matriz A.

   (b) Teste seus resultados com o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 0, \quad i = 1, \cdots, (n-1) \\ -x_{n-1} + 2x_n = 0 \end{cases}$$

   para $n = 5$.

4. O cálculo do determinante de matrizes quadradas pode ser feito usando o método da eliminação de Gauss.

   a) deduza este processo;
   b) aplique-o no cálculo do determinante das matrizes dos sistemas dos exercícios (1) a (3).

5. Resolva os seguintes sistemas utilizando eliminação gaussiana sem e com pivoteamento, utilizando:

   a) Quatro dígitos na representação em ponto flutuante.

$$\begin{cases} 0,004\, x_1 + 15,73\, x_2 = 15,77 \\ 0,423\, x_1 - 24,72\, x_2 = -20,49 \end{cases}$$

   Resposta: Sem pivoteamento $x_1 = 12,50$ e $x_2 = 0.9994$; Com pivoteamento $x_1 = 10,0$ e $x_2 = 1,0$.

   b) Três dígitos na representação em ponto flutuante:

$$\begin{cases} 0,0002\, x_1 + 2\, x_2 = 5 \\ 2\, x_1 + 2\, x_2 = 6 \end{cases}$$

   Resposta: Sem pivoteamento $x_1 = 0,0$ e $x_2 = 2.5$; Com pivoteamento $x_1 = 0,5$ e $x_2 = 2,5$.

6. Verificar, utilizando a eliminação gaussiana, que o seguinte sistema não possui solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Considere o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 3 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 5,5 \end{bmatrix}$$

Trabalhando com arredondamento para dois dígitos significativos em todas as operações:

a) Resolva o sistema linear pelo método de eliminação de Gauss. Resposta: $x = (1,0 \quad 0,94)^t$

b) Faça uma iteração para refinar a solução obtida no item a). Resposta: $x = (1,0 \quad 1,0)^t$

8. Calcule a fatoração LU de A se possível: $A = [1\ 1\ 1\ ;2\ 1\ \ -1\ ;3\ 2\ 0]$

9. Resolva o sistema linear abaixo através da fatoração LU com estratégia de pivoteamento parcial:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -18 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 31 \\ 9x_1 - 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 35 \\ 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 15 \end{cases}$$

10. *a)* Mostre que resolver $AX = B$ onde $A : n \times n$, $X : n \times m$ e $B : n \times m$ é o mesmo que resolver m sistemas do tipo $Ax = b$, onde a matriz A é sempre a mesma e o vetor b se modifica em cada sistema linear. Por quê são m sistemas lineares? Quais são os vetores b de cada sistema? Qual método é mais indicado: eliminação de Gauss ou fatoração LU? (os dois processos com estratégia de pivoteamento parcial) Por que?
b) Considerando a matriz do exercício anterior, faça $B = [26\ \ 4; -7\ \ 7; 37\ \ -22; 8\ \ 9]$.
c) Usando o item *a)*, verifique que A^{-1} pode ser obtida através da resolução de n sistemas lineares. Aplique este processo para obter a inversa da matriz do exercício anterior.

11. Encontre a decomposição $A = LU$ das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

12. A matriz U da decomposição $A = LU$ pode der reescrita como $U = D\bar{U}$ onde D é uma matriz diagonal com elementos $d_i = u_{ii}$ e a matriz $\bar{U}$ possui elementos com valor 1 na diagonal.

a) Mostre que $\bar{u}_{ij} = u_{ij}/u_{ii}$.

b) Escreva a decomposição $A = LD\bar{U}$ das matrizes da questão 11.

c) Quando a decomposição $A = LD\bar{U}$ pode ser escrita como $A = LDL^t$?

13. Utilize as decomposições $A = LU$ da questão 11 para resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ para $b = (21 \quad 3)^t$ e $b = (1 \quad 0)^t$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ para $b = (3 \quad 11 \quad 15)^t$ e $b = (1 \quad 1 \quad 1)^t$

14. Calcule as inversas das matrizes da questão 11 com auxílio da decomposição $A = LU$.

15. Sejam

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & 4 \\ 8 & 8 & 12 & 10 \\ 4 & 4 & 10 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 32 \\ 26 \\ 38 \\ 30 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que A é positiva definida e calcule o fator de Cholesky.

b) Use a Fatoração de Cholesky, substituições para frente e para trás para resolver o sistema linear $Ax = b$.

16. Determine se as matrizes são ou não positivas definidas:
$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 29 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

17. Sejam $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, uma matriz triangular superior, $b \in \mathbb{R}^n$ e o seguinte problema: encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ux = b$. Apresente um algoritmo de retro-substituição para resolver este sistema e analise sua complexidade computacional.

18. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, uma matriz inversível, $b \in \mathbb{R}^n$ e o seguinte problema: encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$. Apresente um algoritmo para realizar a eliminação gaussiana deste sistema e analise sua complexidade computacional.

19. Seja um sistema matricial $AX = B$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

    a) Verifique que tal sistema pode ser resolvido pela solução de p sistemas auxiliares $Ax_k = b_k$, onde $b_k \in \mathbb{R}^n$ é a $k-$ésima coluna de B.

    b) Analise a complexidade computacional na resolução do sistema, através da estratégia da letra a), utilizando eliminação gaussiana em cada um dos p sistemas auxiliares.

    c) Qual seria a vantagem de utilizar a fatoração $A = LU$ para a resolução deste sistema? Faça uma análise da complexidade computacional desta abordagem.

    d) Caso $p = n$ e $B = I$, quem é a matriz X? Analise a complexidade computacional de sua avaliação, utilizando a estratégia da letra a) e a da letra c).

20. Busque na literatura algum algoritmo prático para a Fatoração de Cholesky $A = GG^t$, analise sua complexidade computacional e discuta suas vantagens em relação à fatoração $A = LU$. (ver, por exemplo as referências [**?**] e [**?**])

Parte B - Métodos Iterativos

Observação: Nos exercícios numéricos desta lista, utilize como critério de parada o erro absoluto:
$$\max_{1\le i\le n} |x_i^k - x_i^{k-1}| \le \varepsilon,$$
ou o número máximo de iterações estipulado.

21. Em cada sistema linear abaixo, verifique se o critério das linhas é satisfeito, e resolva por Gauss–Seidel, se possível:
a) $A = [10\ \ 1\ \ 1;\ \ 1\ \ 10\ \ 1;\ \ 1\ \ 1\ \ 10]$ e $b = [12;\ \ 12;\ \ 12]$;
b) $A = [4\ \ -1\ \ 0\ \ 0;\ -1\ \ 4\ \ -1\ \ 0;\ 0\ \ -1\ \ 4\ \ -1;\ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 4]$ e $b = [1;\ 1;\ 1;\ 1]$.

22. Considere o sistema linear: $Ax = b$ onde $A = [1\ \ 2\ \ 1;\ 2\ \ 3\ 1;\ 3\ \ 5\ 2]$ e $b = [3;\ 5;\ 1]$. Verifique usando a eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial que este sistema não admite solução. Qual será o comportamento de Gauss-Seidel?
Faça a interpretação geométrica de Gauss-Seidel em sistemas 2×2 que não tenham solução ou quando admitem infinitas soluções.

23. *a)* Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema $Ax = b$ onde $A = [2\ \ 5;\ 3\ \ 1]$ e $b = [-3;\ 2]$;
b) repita o item *a)* permutando as equações do sistema e compare os resultados obtidos.

24. Seja o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6. \end{array}\right.$$

a) É possível dizer se o Método de Jacobi é convergente para esse sistema, usando o critério das linhas?

b) Resolver o sistema utilizando o Método de Jacobi com $\mathbf{x}^0 = (0.7, -1.6, 0.6)^t$ e $\varepsilon = 10^{-2}$.

25. Seja o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & & 6x_2 & + & 8x_3 & = & -6. \end{array}\right.$$

a) É possível dizer se o Método de Jacobi é convergente para esse sistema, usando o critério das linhas?

b) Mostre que a aplicação do Método de Jacobi sobre o sistema equivalente obtido pela permutação das duas primeiras equações, gera uma sequência convergente. Resolva este sistema utilizando o Método de Jacobi com $\mathbf{x}^0 = (3/5, -2/3, -3/4)^t$ e $\varepsilon = 10^{-3}$.

26. Seja o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & = & 20 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 30. \end{array}\right.$$

a) É possível dizer se o Método de Jacobi é convergente para esse sistema, usando o critério das linhas?

b) É possível dizer se o Método de Gauss-Seidel é convergente para esse sistema, usando o critério de Sassenfeld?

c) Resolver o sistema utilizando o Método de Gauss-Seidel com $\mathbf{x}^0 = (0.7, -1.6, 0.6)^t$ e $\varepsilon = 10^{-2}$.

27. Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) É possível dizer se o Método de Gauss-Seidel é convergente para esse sistema, usando o critério de Sassenfeld?

b) Resolver o sistema utilizando o Método de Gauss-Seidel com $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0)^t$ e $\varepsilon = 10^{-2}$.

28. Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema, com $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^t$, $\varepsilon = 0,01$ ou 4 iterações.

b) Repita o item a) permutando as equações do sistema e compare os resultados obtidos.

29. Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} k & 3 & 1 \\ k & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Usando o critério de linhas, verifique quais os valores positivos de k que garantem a convergência do Método de Gauss-Seidel.

b) Repita o exercício utilizando o critério de Sassenfeld.

c) Escolha o menor número inteiro, positivo, para k e realize duas iterações do método de Gauss-Seidel.

30. O método iterativo $x^{k+1} = Mx^k + c$ é convergente se, para *alguma* norma de matriz $\| \cdot \|$,

$$\|M\| < 1 \quad \text{(condição suficiente para convergência)}$$

. Seja

$$M = \begin{bmatrix} 0,0 & -0,5 & 0,6 \\ 0,1 & 0,0 & 0,3 \\ -0,8 & 0,1 & 0,0 \end{bmatrix}.$$

a matriz de iteração de um sistema $Ax = b$. Teste o critério de convergência para as normas abaixo.

- Norma do Máximo (soma máxima de linha) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
- Norma 1 (soma máxima de coluna) $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

31. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz inversível, $b \in \mathbb{R}^n$ e o seguinte problema: encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$. Apresente um algoritmo para resolver o sistema utilizando o Método de Jacobi e analise sua complexidade computacional.

32. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz inversível, $b \in \mathbb{R}^n$ e o seguinte problema: encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$. Apresente um algoritmo para resolver o sistema utilizando o Método de Gauss-Seidel e analise sua complexidade computacional.

Referências

[1] ATKINSON, K.: Elementary Numerical Analysis. Second edition, John Wiley & Sons (1993).

[2] CAMPOS, F. F.: Algoritmos Numéricos. Editora LTC (2007).

[3] CUNHA, M.C.C.: Métodos Numéricos. Editora Unicamp (2009)

[4] FRANCO, N. B.: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2006).

[5] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L.: Cálculo Numérico, aspectos teóricos e práticos. Pearson Makron Books (1997).

[6] SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M.: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2003).