MS 211 – Calculo Numérico
Lista 04

Resolução de sistemas não lineares: Método de Newton

Motivação

Problemas de otimização do tipo

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a} & x \in \mathcal{D}(f), \end{array}$$

onde $\mathcal{D}(f)$ é o domínio da função $f(x)$, são chamados de problemas sem restrições (ou minimização irrestrita). Uma maneira de encontrar os pontos críticos da função $f(x)$ é procurar os pontos ξ tais que

$$\nabla f(\xi) = 0$$

Para funções de várias variáveis (quando $n > 1$), temos que resolver um sistema não linear. Para uma classe particular de funções, as funções convexas, o sistema tem solução única. Uma função é dita convexa quando, para todo $x,\ y$ no domínio da função e para todo $\lambda \in [0,\ 1]$, temos

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Considere então a função $f(x, y) = 0.5(x^2 - y)^2 + 0.5(1-x)^2$. Encontre o ponto estacionário usando o método de Newton para equações não lineares e uma precisão de 10^{-5} partindo do ponto $(2,\ 2)^\top$.

Solução:

O gradiente da função é dado por

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} -1 + x + 2x^3 - 2xy \\ -x^2 + y \end{bmatrix}$$

Aplicando o método de Newton a partir do ponto dado, realizamos 5 iterações, com os iterandos dados na Tabela 1.

Tabela 1: Iterações do método de Newton

i	x_i	y_i
0	2.00000	2.00000
1	1.80000	3.20000
2	1.05926	0.57333
3	1.03101	1.06217
4	1.00005	0.99914
5	1.00000	1.00000

Exercício 01

Se aplicarmos o método de Newton para sistemas não lineares para resolver um sistema linear $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x,\ b \in \mathbb{R}^n$, em quantas iterações o método irá convergir? Justifique sua resposta.

Exercício 02

Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} e^{x_1} - 1 = 0 \\ e^{x_2} - 1 = 0 \end{cases}$$

que tem como solução $x_1 = x_2 = 0$.

a) Verifique que a matriz Jacobiana é invertível em $x = (0,\ 0)^\top$;

b) Resolva esse sistema através do método de Newton com $x^{(0)} = (-10,\ -10)^\top$

Exercício 03

Mostre que, quando $n = 1$, o método de Newton para sistemas de equações não lineares se reduz ao método de Newton para zeros de funções reais.

Exercício 04

O seguinte sistema não linear possui duas soluções,

$$\begin{cases} -x_1(x_1 + 1) + 2x_2 = 18, \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 = 25. \end{cases}$$

a) Aproxime as duas soluções graficamente.

b) Use o item a) para obter aproximações iniciais e utilize-as para determinar as duas soluções através do método de Newton. Use uma precisão de 10^{-5} no critério de parada.

Exercício 05

Para cada um dos itens a seguir, aplique o método de Newton com alguma condição de parada (sugestão, $\varepsilon = 10^{-3}$) e com um número máximo de três iterações.

a) $\begin{cases} \dfrac{2x - x^2 + 8}{9} + \dfrac{4y - y^2}{4} = 0 \\ 8x - 4x^2 + y^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad , \quad x^{(0)} = (-1,\ -2)^\top$

b) $\begin{cases} 10(y - x^2) = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \quad , \quad x^{(0)} = (-1.2,\ 1)^\top$

Referências

[1] R. Burden, J. Faires, and A. Burden, *Numerical analysis*, 8 ed., 2013.

[2] S. D. Conte and C. W. D. Boor, *Elementary numerical analysis: an algorithmic approach*, McGraw-Hill Higher Education, 1980.

[3] M. C. C. Cunha, *Métodos Numéricos*, Editora da Unicamp, 2000.

[4] G. Dahlquist and A. Björk, *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[5] N. B. Franco, *Cálculo numérico*, Pearson, 2006.

[6] C. B. Moler, *Numerical computing with MATLAB, electronic edition: The MathWorks*. `http://www.mathworks.com/moler/index_ncm.html`. último acesso em 28-01-2015.

[7] M. A. G. Ruggiero and V. L. d. R. Lopes, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*, Makron Books do Brasil, 1997.