Lista de Exercícios 4
MS211 - 2020/S1
Resolução de Sistemas Não Lineares

Observação: Utilize como critério de parada o erro absoluto

$$\max_{1\le i\le n} |x_i^k - x_i^{k-1}| \le \varepsilon,$$

ou o número máximo de iterações estipulado.

---

1. Considere os sistemas não lineares abaixo:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ x_1x_2 - 1 = 0 \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1x_2 - 3 = 0 \\ x_1^2 - x_2 - 2 = 0 \end{array} \right. \quad c) \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 0 \\ x_1^2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \end{array} \right.$$

   Pede–se:
   i) Localize gráficamente as raízes de cada sistema não linear.
   ii) Em cada caso obtenha todas as raízes através do Método de Newton escolhendo chutes iniciais convenientes.

2. Utilizando o método de Newton e $\mathbf{x}^0 = (0.1, 0.1, -0.1)^t$, verifique que o sistema não linear

$$\begin{gathered} 3x_1 + \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0 \\ (x_1)^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{gathered}$$

   possui solução aproximada $(0.5, 0, -0.52359877)^t$.

3. Use o Método de Newton com $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ para calcular $\mathbf{x}^3$ em cada um dos seguintes sistemas não-lineares.

   a)

$$\left\{ \begin{array}{l} 4(x_1)^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}(x_2)^2 = -8 \\ \frac{1}{2}x_1(x_2)^2 + 2x_1 - 5x_2 = -8 \end{array} \right.$$

   b)

$$\begin{gathered} \sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0 \\ \left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)\left(e^{2x_1} - e\right) + 4e(x_2)^2 - 2ex_1 = 0 \end{gathered}$$

   c)

$$\begin{gathered} x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12 \\ (x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25 \end{gathered}$$

   d)

$$\begin{gathered} 5(x_1)^2 = (x_2)^2 \\ x_2 = 14(\sin x_1 + \cos x_2) \end{gathered}$$

4. Use o Método de Newton com $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ para calcular $\mathbf{x}^3$ em cada um dos seguintes sistemas não-lineares.

a)

$$\begin{cases} 3x_1 + \cos(x_2x_3) = \dfrac{1}{2} \\ 4(x_1)^2 - 625(x_2)^2 + 2x_2 = 1 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 = \dfrac{3-10\pi}{3} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} (x_1)^2 + x_2 - 37 = 0 \\ x_1 - (x_2)^2 - 5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{gathered} 10x_1 - 2(x_2)^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0 \\ 8(x_2)^2 + 4(x^3)^2 - 9 = 0 \\ 8x_2x_3 + 4 = 0 \end{gathered}$$

5. No Método de Newton Modificado para a resolução de sistemas de equações não-lineares na forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, a seqüência $\{\mathbf{x}^k\}$ é gerada através de $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{d}^k$, onde $\mathbf{d}^k$ é a solução do sistema linear $J(\mathbf{x}^0)\,\mathbf{d}^k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ e $J(\mathbf{x}^0)$ é a matriz Jacobiana da função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, avaliada no ponto inicial $\mathbf{x}^0$. A partir do algoritmo da questão anterior, elabore um algoritmo para o método de Newton Modificado que utilize a fatoração LU da Jacobiana avaliada em $\mathbf{x}^{\mathbf{0}}$ para a solução de um sistema não-linear com n equações e n incógnitas.

6. Encontre soluções dos sistemas abaixo utilizando o método de Newton e com o método de Newton modificado, com $\mathbf{x}^{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$ e $\varepsilon = 10^{-4}$. Compare os resultados.

a)

$$\begin{cases} (x_1)^2 & + & x_2 & & & = & 37 \\ x_1 & - & (x_2)^2 & & & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + \cos(x_1x_2x_3) - 1 & = & 0 \\ (1-x_1)^{\frac{1}{4}} + x_2 + 0.05x_3^2 - 0.15x_3 - 1 & = & 0 \\ -(x_1)^2 - 0.1(x_2)^2 + 0.01x_2 + x_3 - 1 & = & 0 \end{cases}$$

7. Considere o sistema não linear abaixo:

$$\begin{cases} e^{(x_1)} - 1 = 0 \\ e^{(x_2)} - 1 = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é: $\mathbf{x}^* = (0\ 0)^T$.
a) Verifique que a matriz Jacobiana (matriz de derivadas parciais das funções) é não singular (inversível) em $\mathbf{x}^*$.
b) Resolva este sistema não linear através do Método de Newton, usando $\mathbf{x}^0 = (-10\ \ -10)^T$. Analise os resultados obtidos e justifique o que acontece. Sugestão: analise a matriz Jacobiana!

8. Sejam

$$\begin{cases} f_1(x) & = & x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 1 \\ f_2(x) & = & 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

(a)Seja $z = x_1 + ix_2$. Verifique que a equação complexa $g(z) = z^3 + 1 = 0$ é equivalente ao sistema de equações $F(x) = 0$.

(b)Sabendo que as raízes de $g(z) = 0$ são: $z_1 = -1, z_2 = 0.5+i\sqrt{3}/2$ e $z_3 = 0.5-i\sqrt{3}/2$, encontre as raízes z_2 e z_3, pelo método de Newton, a partir de aproximações iniciais adequadas(use como precisões $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 5 \times 10^{-2}$).

9. Se aplicarmos o método de Newton para sistemas não lineares, para resolver um sistema linear, $Ax = b, \;\; A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \;\; x, b, \in \mathbb{R}^n$, quantas iterações ele irá fazer? Justifique.

Referências

[1] CUNHA, M.C.C.: Métodos Numéricos. Editora Unicamp (2009)

[2] FRANCO, N. B.: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2006).

[3] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L.: Cálculo Numérico, aspectos teóricos e práticos. Pearson Makron Books (1997).

[4] SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M.: Cálculo Numérico. Editora Pearson (2003).
