

MS 211 – LISTA DE EXERCÍCIOS No. 5
RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

1. Dado o PVI: $y' = 4 - 2x$; $y(0) = 2$ considere $h = 0.25$ e $h = 0.5$.
 - a) Encontre uma aproximação para $y(1)$ usando o método de Euler Aperfeiçoado para cada h .
 - b) Compare seus resultados com a solução exata: $y(x) = -x^2 + 4x + 2$. Justifique.
 - c) Podemos esperar o mesmo resultado para o método de Euler? Justifique sua resposta.
2. Use os métodos de Euler e Euler Aperfeiçoado com $h = 0.5$ e $h = 0.25$ (cada método aplicado com os dois valores de h), para encontrar uma aproximação para $y(2)$ resolvendo o PVI: $y' = \cos x + 1$, $y(0) = -1$.
3. Dado o PVI: $y' = -x/y$, $y(0) = 20$, deseja-se encontrar uma aproximação para $y(8)$. Resolva por:
 - a) Runge-Kutta de 2ª ordem, $h = 2$;
 - b) Runge-Kutta de 4ª ordem, $h = 4$;
 - c) Comente seus resultados.
4. Reescreva as seguintes equações como um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem e aplique o método com de Euler com $h = 0.25$, para $x \in [0, 1]$:
 - a) $y'''' + (\cos x)y'''' + \exp(-x)y'' - (x^2 + 1)y' + xy = 2x\text{sen}(xy)$ com condições iniciais: $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = 2$ e $y'''(0) = 3$;
 - b) $y'''' + (xy'')^2/(1 + y')^2 + \log(1 + y) = 0$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
5. Considere o PVI: $y' = (y^2 - 1)/(x^2 + 1)$; $y(0) = 1$
 - a) Calcule aproximações para $y(1)$, usando o Método de Euler com $h = 0.25$;
 - b) Repita o item (a), usando agora o Método de Euler Aperfeiçoado.
6. Determine $y(1)$ para $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ utilizando o método de Euler com $h = 0.25$.
7. Escreva a equação de 2ª ordem : $y''(x) = 2(\exp(2x) - y^2)^{1/2} = 0$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, como um sistema de equações de 1ª ordem e resolva-o, para $x \in [0, 0.6]$, usando $h = 0.2$, pelo método de Euler.
8.
 - a) Escreva a fórmula de iteração para o método de Taylor de 2ª ordem aplicado ao PVI: $y' + y = x$, $y(0) = 0$ considerando $h = 0.1$;
 - b) Verifique que $y(x) = \exp(-x) + x - 1$ é solução do PVI.
9. Considere a equação diferencial $y' = y\text{sen}(y) + x$ com a condição inicial $y(0) = 1$. Calcule $y'(0)$, $y''(0)$ e $y'''(0)$. Utilizando esta informação calcule aproximadamente $y(0.2)$.
10. Resolva pelo Método de Diferenças Finitas, o seguinte problemas de valor de contorno (use $h = 0.25$): $y'' + 2y' + y = x$, $y(0) = 2$ e $y(1) = 0$

11. Formule por diferenças finitas sistemas de equações cuja solução aproxime a solução dos seguintes problemas de contorno: a) $y'' = y \operatorname{sen}(y) + xy$, $y(0) = 1$ e $y(1) = 5$; b) $y'' = 2y + y^3 - x$, $y(0) = 4$ e $y(6) = 2$.
12. Considere o PVI: $y' = y$, $y(0) = 1$
 (a) Mostre que o método de Euler Aperfeiçoado, quando aplicado a esta equação fornece : $y_{k+1} = (1 + h + h^2/2)^{k+1}$;
 (b) Comparando com a solução exata do problema, você esperaria que o erro tivesse sempre o mesmo sinal? Justifique!
13. Considere o PVI de 2a. ordem: $y'' + 7y = 0$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$, com $x \in [0, 1]$.
 a) aplique o método de Euler para resolver este problema como um sistema de equações de 1a. ordem, usando $h = 0.25$.
14. Calcule $y(1)$ para $y' = y - x$; $y(0) = 2$, utilizando Euler e Runge-Kutta de 4a. ordem com $h = 0.2$. Compare seus resultados com os valores exatos de $y(x)$ nos pontos x_i , sabendo que $y(x) = \exp(x) + x + 1$.
15. Considere o PVI: $y' = yx^2 - y$; $y(0) = 1$
 a) Encontre a solução aproximada usando o método de Euler com $h = 0.5$ e $h = 0.25$, considerando $x \in [0, 2]$;
 b) idem, usando Euler Aperfeiçoado;
 c) idem, usando Runge-Kutta de 4a. ordem.
 d) sabendo que a solução analítica do problema é $y = \exp(-x + x^3/3)$, coloque num mesmo gráfico a solução analítica e as soluções numéricas encontradas nos itens anteriores. Compare seus resultados.
16. Substitua $y'(x)$ no PVI abaixo por $(y(x+h) - y(x))/h$ e obtenha uma equação de diferenças para aproximar a solução da equação diferencial. Faça $h = 0.2$ e $h = 0.1$ e encontre, em cada caso, uma aproximação para $y(1.6)$. Analise os resultados: $y' = (1/x)(2y + x + 1)$, $y(1) = 0.5$. A solução exata é: $y(x) = 2x^2 - x - 0.5$. O método das diferenças finitas descrito neste exemplo é outra maneira de aproximarmos soluções de problemas de valor inicial.
17. a) Aplique o método de Euler para obter $y(1)$, $y'(1)$ e $y''(1)$, usando $h = 0.5$:
 $y''' - y'' + 0.2(y') + y \operatorname{sen}(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.
 b) Considere o PVC: $y'' - y' \operatorname{sen}(y) - xy = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 5$. Escreva o sistema de equações que deverá ser resolvido para obter os valores y_i no intervalo $[0,1]$, com espaçamento $h = 0.2$.
-