

MS 211 – LISTA DE EXERCÍCIOS No. 5  
RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

1. Dado o PVI:  $y' = 4 - 2x$ ;  $y(0) = 2$  considere  $h = 0.25$ .
  - a) Encontre uma aproximação para  $y(1)$  usando o método de Euler Aperfeiçoado;
  - b) Compare seus resultados com a solução exata:  $y(x) = -x^2 + 4x + 2$ . Justifique.
  - c) Podemos esperar o mesmo resultado para o método de Euler? Justifique sua resposta.
2. Considere o PVI:  $y'(x) = f(x, y(x))$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Dado o passo  $h$ , no método de Euler Aperfeiçoado as aproximações para o valor da função  $y$  em  $x_{j+1}$  são obtidas através de:  $y_{j+1} = y_j + h(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + hy'_j))/2$ . Verifique geometricamente que, este valor corresponde ao valor da reta que passa pelo ponto  $P = (x_j, y_j)$  e tem inclinação:  $m = \text{????}$ . Justifique o valor de  $m$  e faça um gráfico com a interpretação geométrica deste método.
3. Considere o PVI:  $y'(x) = f(x, y(x))$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Dado o passo  $h$ , no método de Euler Modificado as aproximações para o valor da função  $y$  em  $x_{j+1}$  são obtidas através de:  $y_{j+1} = y_j + h(f(x_j + h/2, y_j + (h/2)y'_j))$ . Geometricamente, este valor corresponde ao valor da reta que passa pelo ponto  $P = (x_j, y_j)$  e tem inclinação:  $m = \text{???}$ . Justifique o valor de  $m$  e faça um gráfico com a interpretação geométrica deste método.
4. Use os métodos de Euler e Euler Aperfeiçoado com  $h = 0.5$  e  $h = 0.25$  (cada método aplicado com os dois valores de  $h$ ), para encontrar uma aproximação para  $y(2)$  resolvendo o PVI:  $y' = \cos x + 1$ ,  $y(0) = -1$ .
5. Dado o PVI:  $y' = -x/y$ ,  $y(0) = 20$ , deseja-se encontrar uma aproximação para  $y(8)$ . Resolva por:
  - a) Método de Euler Aperfeiçoado ou o Modificado com  $h = 2$ ;
  - b) Runge-Kutta de 4ª ordem,  $h = 4$ ;
  - c) Comente seus resultados.
6. Reescreva as seguintes equações como um sistema de equações diferenciais de 1a. ordem e aplique o método com de Euler com  $h = 0.25$ , para  $x \in [0, 1]$ :
  - a)  $y'''' + (\cos x)y'''' + \exp(-x)y'' - (x^2 + 1)y' + xy = 2x\text{sen}(xy)$  com condições iniciais:  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 1$ ;  $y''(0) = 2$  e  $y'''(0) = 3$ ;
  - b)  $y''' + (xy'')^2/(1 + y')^2 + \log(1 + y) = 0$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 1$ .
7. Considere o PVI:  $y' = 1 + y/x$ ;  $y(1) = 2$ 
  - a) Obtenha aproximações para  $y(2)$ , usando o Método de Euler com  $h = 0.25$ ;
  - b) repita o item (a), usando agora o Método de Euler Aperfeiçoado;
  - c) repita o item (a), usando agora o Método de Euler Modificado.
8. Considere os PVI de 2a. ordem abaixo. Escreva cada equação de 2a. ordem como um sistema de equações de 1a. ordem e resolva pelo método de Euler:
  - a)  $y''(x) = 2(\exp(2x) - y^2)^{1/2}$ ,  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$ ,  $x \in [0, 0.6]$ , usando  $h = 0.2$ ;
  - b)  $y'' - 3y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , usando  $h = 0.25$ ;
  - c)  $y'' + 7y = 0$ ,  $y(0) = 2$  e  $y'(0) = 0$ , com  $x \in [0, 1]$ , usando  $h = 0.25$ .
9.
  - a) Escreva a fórmula de iteração para o método de Taylor de 2a. ordem aplicado ao PVI:  $y' + y = x$ ,  $y(0) = 0$  considerando  $h = 0.1$ ;
  - b) Verifique que  $y(x) = \exp(-x) + x - 1$  é solução do PVI.

10. Considere o PVI:  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$   
 a) Mostre que o método de Euler Aperfeiçoado, quando aplicado a esta equação fornece :  $y_{k+1} = (1 + h + h^2/2)^{k+1}$ ;  
 b) Comparando com a solução exata do problema, você esperaria que o erro tivesse sempre o mesmo sinal? Justifique!
11. Calcule  $y(1)$  para  $y' = y - x$ ;  $y(0) = 2$ , utilizando Euler e Runge-Kutta de 4a. ordem com  $h = 0.2$ . Compare seus resultados com os valores exatos de  $y(x)$  nos pontos  $x_i$ , sabendo que  $y(x) = \exp(x) + x + 1$ .
12. Considere o PVI:  $y' = yx^2 - y$ ;  $y(0) = 1$   
 a) Encontre a solução aproximada usando o método de Euler com  $h = 0.5$  e  $h = 0.25$ , considerando  $x \in [0, 2]$ ;  
 b) idem, usando Euler Aperfeiçoado;  
 c) idem, usando Runge-Kutta de 3a. ordem.  
 d) sabendo que a solução analítica do problema é  $y = \exp(-x + x^3/3)$ , coloque num mesmo gráfico a solução analítica e as soluções numéricas encontradas nos itens anteriores. Compare seus resultados.
13. O método das diferenças finitas descrito neste exemplo é outra maneira de aproximarmos soluções de problemas de valor inicial. Substitua  $y'(x)$  no PVI  $y' = (1/x)(2y + x + 1)$ ,  $y(1) = 0.5$  por  $(y(x+h) - y(x))/h$  e obtenha uma equação de diferenças para aproximar a solução da equação diferencial. Faça  $h = 0.2$  e  $h = 0.1$  e encontre, em cada caso, uma aproximação para  $y(1.6)$ . Analise os resultados comparando com a solução exata:  $y(x) = 2x^2 - x - 0.5$ .
14. Aplique o método de Euler ao PVI de ordem 3:  $y''' - y'' + 0.2(y') + y \operatorname{sen}(x) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 1$ . Obtenha  $y(1)$ ,  $y'(1)$  e  $y''(1)$ , usando  $h = 0.5$
15. Resolva pelo Método de Diferenças Finitas, o seguinte problemas de valor de contorno (use  $h = 0.25$ ):  $y'' + 2y' + y = x$ ,  $y(0) = 2$  e  $y(1) = 0$
16. Considere o PVC:  $y'' - y' \operatorname{sen}(y) - xy = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 5$ . Escreva o sistema de equações que deverá ser resolvido para obter os valores  $y_i$  no intervalo  $[0,1]$ , com espaçamento  $h = 0.2$ .
17. Formule por diferenças finitas sistemas de equações cuja solução aproxime a solução dos seguintes problemas de contorno: a)  $y'' = y \operatorname{sen}(y) + xy$ ,  $y(0) = 1$  e  $y(1) = 5$ ;  
 b)  $y'' = 2y + y^3 - x$ ,  $y(0) = 4$  e  $y(6) = 2$ .
-