MS 211 – LISTA DE EXERCICIOS No. 5
RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

(Nos exercícios em que for solicitado métodos como Runge-Kutta de 3a. e 4a. ordem, escreva um programa para rodar no MatLab ou use os comandos `ode23` ou `ode45` do MatLab. Estes comandos correspondem aos algoritmos que envolvem métodos de Runge-Kutta (de 2a. e 3a. ordem no caso de `ode23` e de 4a. e 5a. ordem no caso de `ode45`) e requerem alguns parâmetros de entrada; pesquise usando os comandos: `help ode23` e `help ode45`).

1. Resolver o exercício 1 do capítulo sobre Equações Diferenciais do livro de Cálculo Numérico: método de Euler Modificado.

2. O PVI: $y' = -20y$; $y(0) = 1$ tem por única solução $y(x) = \exp(-20x)$.
   a) Verifique a afirmação acima.
   b) Verifique que qualquer método de Runge–Kutta de 2^a ordem, quando aplicado a este problema nos fornece: $y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3. Dado o PVI: $y' = 4 - 2x$; $y(0) = 2$ considere $h = 0.25$ e $h = 0.1$.
   a) Encontre uma aproximação para $y(5)$ usando o método de Euler Aperfeiçoado para cada h.
   b) Compare seus resultados com a solução exata dada por $y(x) = -x^2 + 4x + 2$. Justifique.

4. Dado o PVI: $y' = -x/y$, $y(0) = 20$, deseja–se encontrar uma aproximação para $y(16)$. Resolva por:
   a) Runge–Kutta de 2^a ordem, $h = 2$; *b)* Runge–Kutta de 4^a ordem, $h = 4$.

5. Calcule $y(1)$ para $y' = y - x$; $y(0) = 2$, utilizando Euler e Runge-Kutta de 4a.ordem com $h = 0.2$. Comparar seus resultados com os valores exatos de $y(x)$ nos pontos x_i, sabendo que $y(x) = exp(x) + x + 1$.

6. Considere o PVI: $y' = (y^2 - 1)/(x^2 + 1)$; $y(0) = 1$
   a) Calcule aproximações para $y(1)$, usando o Método de Euler com $h = 0.2$ e $h = 0.25$;
   b) Repita o item (a), usando agora o Método de Euler Aperfeiçoado.

7. Considere o PVI: $y' = yx^2 - y$; $y(0) = 1$
   a) Encontre a solução aproximada usando o método de Euler com $h = 0.5$ e $h = 0.25$, considerando $x \in [0, 2]$;
   b) idem, usando Euler Aperfeiçoado;
   c) idem, usando Runge-Kutta de 4a. ordem.
   d) sabendo que a solução analítica do problema é $y = exp(-x + x^3/3)$, coloque num mesmo gráfico a solução analítica e as soluções numéricas encontradas nos itens anteriores. Compare seus resultados.

8. Determine $y(1)$ para $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ utilizando o método de Euler com $h = 0.1$.

9. Considere o problema: $\left\{ \begin{array}{lcl} y'' + 7y & = & 0 \\ y(0) & = & 2 \\ y'(0) & = & 0 \end{array} \right.$ com $x \in [0, 1]$.

   a) reescreva os métodos de Euler e Euler Aperfeiçoado para resolver este problema como um sistema de equações de 1a. ordem;
   b) resolva o problema usando Euler Aperfeiçoado e $h = 0.25$.

10. Escreva a equação de $2a$. ordem : $\left\{ \begin{array}{lcl} y''(x) & = & 2(exp(2x) - y^2)^{1/2} \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{array} \right.$

    como um sistema de equações de $1a$. ordem e resolva-o, para $x \in [0, 0.6]$, usando $h = 0.2$:
    a) pelo método de Euler; b) pelo método de Euler Aperfeiçoado.

11. Considere o PVI: $\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & y \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$

    (a)Mostre que o método de Euler Aperfeiçoado, quando aplicado a esta equação fornece : $y_{k+1} = (1+h+h^2/2)^{k+1}$; (b) Comparando com a solução exata do problema, você esperaria que o erro tivesse sempre o mesmo sinal? Justifique!

12. Considere a equação diferencial $y' = yseny + x$ com a condição inicial $y(0) = 1$. Calcule $y'(0)$, $y''(0)$ e $y'''(0)$. Utilizando esta informação calcule aproximadamente $y(0.2)$.

13. Resolva pelo Método de Diferenças Finitas, os seguintes problemas de valor de contorno com $h = 0.1$:

    $a) \left\{ \begin{array}{ll} y'' & = -2y' - y + x \\ y(0) & = 0 \\ y(1) & = 0 \end{array} \right.$ $b) \left\{ \begin{array}{ll} y'' & = ysen(y) + ty \\ y(0) & = 1 \\ y(1) & = 5 \end{array} \right.$ $c) \left\{ \begin{array}{ll} y'' & = 2y + y^3 - t \\ y(0) & = 4 \\ y(6) & = 2 \end{array} \right.$

14. Substitua $y'(x)$ no PVI abaixo por $\dfrac{y(x+h) - y(x)}{h}$ e obtenha uma equação de diferenças para aproximar a solução da equação diferencial. Faça $h = 0.2$ e $h = 0.1$ e encontre, em cada caso, uma aproximação para $y(1.6)$. Analise os resultados:

    $$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & (2y + x + 1)\dfrac{1}{x} \\ y(1) & = & 0.5 \end{array} \right.$$

    A solução exata é: $y(x) = 2x^2 - x - 0.5$. O método das diferenças finitas descrito neste exemplo é outra maneira de aproximarmos soluções de problemas de valor inicial.

15. Use o processo descrito no exercício anterior para resolver o PVI do exercício 3. Compare os resultados obtidos.