MS 211 Cálculo Numérico

Primeiro Semestre de 2013

Lista de Exercícios MS211
Tópico 5 – "Resolução Numérica de Equações Diferenciais"

Exercício 1.

Considere a equação diferencial $y' = y\,\sin(y) + x$ com $y(0) = 1$. Calcule $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, e utilizando estas informações calcule aproximadamente $y(0.25)$.

Exercício 2.

Dado o PVI $y' = 4 - 2x;\; y(0) = 2$, considere $h = 0.25$.

(a) Encontre uma aproximação para $y(1)$ usando o método de Euler

(b) Encontre uma aproximação para $y(1)$ usando o método de Euler Aperfeiçoado.

(c) Compare seus resultados com a solução analítica $y(x) = -x^2 + 4x + 2$.

Exercício 3.

Considere o PVI $y' = f(x, y(x));\; y(x_0) = y_0$. No método Euler Aperfeiçoado, as aproximações $y(x_{j+1})$ a partir de x_j são obtidas através de:

$$y(x_{j+1}) \approx y_{j+1} = r_j(x_{j+1}) = y_j + M\,h,$$

onde $M = \left(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + h\,y_j')\right)/2$. Analise a inclinação M da reta $r_j(x)$ e faça um gráfico com a interpretação geométrica deste método.

Exercício 4.

Use os métodos de Euler e Euler Aperfeiçoado com $h = 0.5$ e $h = 0.25$ (cada método com os dois valores de h), para encontrar uma aproximação para $y(2)$ para o PVI $y' = \cos x + 1;\; y(0) = -1$.

Exercício 5.

Considere o PVI $y' = f(x, y(x));\; y(x_0) = y_0$. No método Euler Modificado, as aproximações $y(x_{j+1})$ a partir de x_j são obtidas através de:

$$y(x_{j+1}) \approx y_{j+1} = r_j(x_{j+1}) = y_j + h\,f(\bar{x}_j, \bar{y}_j),$$

onde $\bar{x}_j = x_j + 0.5\,h$ e $\bar{y}_j = y_j + (0.5\,h)\,y_j'$. Analise a inclinação M da reta $r_j(x)$ e faça um gráfico com a interpretação geométrica deste método.

Exercício 6.

Considere o PVI $y' = 1 + y/x$; $y(1) = 2$. Obtenha aproximações para $y(2)$ para $h = 0.25$, usando:

(a) O Método de Euler;

(b) O Método de Euler Aperfeiçoado;

(c) O Método de Euler Modificado.

Exercício 7.

Usando série de Taylor, encontre a solução do PVI $xy' = x - y$; $y(2) = 2$ em $x = 2.1$ com precisão de cinco casas decimais. *[**Dica:** De quantos termos a série precisa para que o erro cometido seja da ordem de* 10^{-6}*? Consulte Conte & de Boor, Exemplo 8.1]*

Exercício 8. (Conte & de Boor, Ex. 8.3-3])

Da série de Taylor de $y(x)$, encontre $y(0.1)$ com seis casas de precisão se $y(x)$ satisfaz

$$y' = xy + 1, \qquad y(0) = 1.$$

Exercício 9.

Dado o PVI $y' = -x/y$; $y(0) = 20$, deseja-se encontrar uma aproximação para $y(10)$. Resolva por:

(a) Método de Euler Aperfeiçoado ou Modificado, $h = 0.25$;

(b) Runge-Kutta de 2a ordem, $h = 0.25$;

(c) Runge-Kutta de 4a ordem, $h = 0.25$;

(d) Repita os itens (a), (b) e (c) com $h = 0.125$, $h = 0.5$ e $h = 0.75$ e verifique a qualidade das aproximações obtidas em cada caso.

Obs.: Lembre-se de comentar todos os resultados obtidos.

Exercício 10.

Considere o PVI $y' = y - x$; $y(0) = 2$. Calcule $y(1)$ através dos métodos de Euler e Runge-Kutta de 4a ordem com $h = 0.25$. Compare seus resultados com os valores de $y(x)$ em cada ponto x_j, sabendo que $y(x) = e^x + x + 1$.

Exercício 11.

Considere o PVI $y' = yx^2 - y$; $y(0) = 1$.

(a) Encontre a solução aproximada para $0 \leq x \leq 2$ usando o método de Euler com $h = 0.5$ e $h = 0.25$;

(b) Idem, usando Euler Aperfeiçoado;

(c) Idem, usando Runge-Kutta de 3a ordem;

(d) Sabendo que $y(x) = \exp\{-x + x^3/3\}$, coloque num mesmo gráfico a solução analítica e as aproximadas obtidas. Compare os resultados.

Exercício 12.

Aplique o método de Euler ao PVI de ordem 3 $y''' - y'' + 0.2y' + y\sin(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$. Obtenha $y(1)$, $y'(1)$ e $y''(1)$ usando $h = 0.5$.

Exercício 13.

Resolva pelo Método de Diferenças Finitas o seguinte problema de valor de contorno para $h = 0.25$:

$$y'' + 2y' + y = x, \qquad y(0) = 2 \qquad y(1) = 0.$$

Exercício 14.

Formule, por diferenças finitas, sistemas de equações cuja solução aproxime a solução dos seguintes problemas de contorno, com $h = 0.125$:

(a) $y'' = y\,\sin(y) + xy, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 5;$

(b) $y'' = 2y + y^3 - x, \quad y(0) = 4, \quad y(6) = 2.$