MS 211 – LISTA DE EXERCICIOS No. 5
RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

1. Dado o PVI: $y' = 4 - 2x$; $y(0) = 2$ considere $h = 0.25$.
   a) Encontre uma aproximação para $y(1)$ usando o método de Euler Aperfeiçoado;
   b) Compare seus resultados com a solução exata: $y(x) = -x^2 + 4x + 2$. Justifique.
   c) Podemos esperar o mesmo resultado para o método de Euler? Justifique sua resposta.

2. Considere o PVI: $y'(x) = f(x, y(x))$, $\quad y(x_0) = y_0$. Dado o passo h, no método de Euler Aperfeiçoado as aproximações para o valor da função y em x_{j+1} são obtidas através de: $y_{j+1} = y_j + h(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_j + hy'_j)/2)$. Verifique geometricamente que, este valor corresponde ao valor da reta que passa pelo ponto $P = (x_j, y_j)$ e tem inclinação: $m =$????. Justifique o valor de m e faça um gráfico com a interpretação geométrica deste método.

3. Considere o PVI: $y'(x) = f(x, y(x))$, $\quad y(x_0) = y_0$. Dado o passo h, no método de Euler Modificado as aproximações para o valor da função y em x_{j+1} são obtidas através de: $y_{j+1} = y_j + h(f(x_j + h/2, y_j + (h/2)y'_j))$. Geometricamente, este valor corresponde ao valor da reta que passa pelo ponto $P = (x_j, y_j)$ e tem inclinação: $m =$???. Justifique o valor de m e faça um gráfico com a interpretação geométrica deste método.

4. Use os métodos de Euler e Euler Aperfeiçoado com $h = 0.5$ e $h = 0.25$ (cada método aplicado com os dois valores de h), para encontrar uma aproximação para $y(2)$ resolvendo o PVI: $y' = \cos x + 1$, $y(0) = -1$.

5. Dado o PVI: $y' = -x/y$, $y(0) = 20$, deseja–se encontrar uma aproximação para $y(8)$. Resolva por:
   a) Método de Euler Aperfeiçoado ou o Modificado com $h = 2$;
   b) Runge–Kutta de 4^a ordem, $h = 4$;
   c) Comente seus resultados.

6. Reescreva as seguintes equações como um sistema de equações direfenciais de 1a. ordem e aplique o método com de Euler com $h = 0.25$, para $x \in [0.\ 1]$:
   a) $y'''' + (\cos x)y''' + \exp(-x)y'' - (x^2 + 1)y' + xy = 2x\text{sen}(xy)$ com condições iniciais: $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = 2$ e $y'''(0) = 3$;
   b) $y''' + (xy'')^2/(1 + y')^2 + \log(1 + y) = 0$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

7. Considere o PVI: $y' = 1 + y/x$; $y(1) = 2$
   a) Obtenha aproximações para $y(2)$, usando o Método de Euler com $h = 0.25$;
   b) repita o item (a), usando agora o Método de Euler Aperfeiçoado;
   c) repita o item (a), usando agora o Método de Euler Modificado.

8. Considere os PVI de 2a.ordem abaixo. Escreva cada equação de $2a$. ordem como um sistema de equações de $1a$. ordem e resolva pelo método de Euler:
   a) $y''(x) = 2(exp(2x) - y^2)^{1/2} = 0$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, $x \in [0,\ 0.6]$, usando $h = 0.2$;
   b) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $x \in [0,\ 1]$, usando $h = 0.25$;
   c) $y'' + 7y = 0$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$, com $x \in [0, 1]$, usando $h = 0.25$.

9. *a)* Escreva a fórmula de iteração para o método de Taylor de 2a. ordem aplicado ao PVI: $y' + y = x$, $y(0) = 0$ considerando $h = 0.1$;
   b) Verifique que $y(x) = \exp(-x) + x - 1$ é solução do PVI.

10. Considere o PVI: $y' = y$, $y(0) = 1$
    a) Mostre que o método de Euler Aperfeiçoado, quando aplicado a esta equação fornece : $y_{k+1} = (1 + h + h^2/2)^{k+1}$;
    b) Comparando com a solução exata do problema, você esperaria que o erro tivesse sempre o mesmo sinal? Justifique!

11. Calcule $y(1)$ para $y' = y - x$; $y(0) = 2$, utilizando Euler e Runge-Kutta de 4a.ordem com $h = 0.2$. Comparar seus resultados com os valores exatos de $y(x)$ nos pontos x_i, sabendo que $y(x) = \exp(x) + x + 1$.

12. Considere o PVI: $y' = yx^2 - y$; $y(0) = 1$
    a) Encontre a solução aproximada usando o método de Euler com $h = 0.5$ e $h = 0.25$, considerando $x \in [0, 2]$;
    b) idem, usando Euler Aperfeiçoado;
    c) idem, usando Runge-Kutta de 3a. ordem.
    d) sabendo que a solução analítica do problema é $y = \exp(-x + x^3/3)$, coloque num mesmo gráfico a solução analítica e as soluções numéricas encontradas nos itens anteriores. Compare seus resultados.

13. O método das diferenças finitas descrito neste exemplo é outra maneira de aproximarmos soluções de problemas de valor inicial. Substitua $y'(x)$ no PVI $y' = (1/x)(2y + x + 1)$, $y(1) = 0.5$ por $(y(x + h) - y(x))/h$ e obtenha uma equação de diferenças para aproximar a solução da equação diferencial. Faça $h = 0.2$ e $h = 0.1$ e encontre, em cada caso, uma aproximação para $y(1.6)$. Analise os resultados comparando com a solução exata: $y(x) = 2x^2 - x - 0.5$.

14. Aplique o método de Euler ao PVI de ordem 3: $y''' - y'' + 0.2(y') + ysen(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1, y''(0) = 1$. Obtenha $y(1), y'(1)$ e $y''(1)$, usando $h = 0.5$

15. Resolva pelo Método de Diferenças Finitas, o seguinte problemas de valor de contorno (use $h = 0.25$): $y'' + 2y' + y = x$, $y(0) = 2$ e $y(1) = 0$

16. Considere o PVC: $y'' - y'sen(y) - xy = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 5$. Escreva o sistema de equações que deverá ser resolvido para obter os valores y_i no intervalo [0,1], com espaçamento $h = 0.2$.

17. Formule por diferenças finitas sistemas de equações cuja solução aproxime a solução dos seguintes problemas de contorno: *a)* $y'' = y\text{sen}(y) + xy$, $y(0) = 1$ e $y(1) = 5$;
    b) $y'' = 2y + y^3 - x$, $y(0) = 4$ e $y(6) = 2$.
