MS 211 – Calculo Numérico
Lista 05

Resolução numérica de equações diferenciais ordinárias

Motivação

A equação diferencial dada em (1) é conhecida como *oscilador de Van der Pol*, que é um oscilador não conservativo com um amortecimento não linear

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \tag{1}$$

onde x é a coordenada da posição, que depende do tempo $t > 0$ e μ é um parâmetro que indica a não linearidade e a intensidade do amortecimento. Encontre uma aproximação para $x(0.4)$ usando o método de Runge-Kutta de segunda ordem e tomando como condições iniciais os valores $x(0) = 0.5$, $x'(0) = 0$ e $\mu = 1$.

Solução:

Para aplicar o método de Runge-Kutta, vamos primeiro converter o PVI em um problema da forma $x'(t) = f(x, t)$. Para isto, fazemos

$$\mathbf{x}(t) = (x(t),\, x'(t))^\top,$$

e portanto

$$\mathbf{x}'(t) = (x'(t),\, x''(t))^\top$$

Agora, aplicando o método de Runge-Kutta, para vários valores de h, vamos obter os seguintes resultados mostrados na Tabela 1. A Figura 1 mostra a aproximação numérica para a solução no intervalo $[0,\, 0.4]$. Note a divergência dos valores quando o tamanho do passo é variado.

Tabela 1: Aproximações para a solução do PVI dado

h	$x(0.4)$
0.4	0.4600
0.2	0.4571
0.1	0.4564
0.01	0.4562
0.001	0.4562

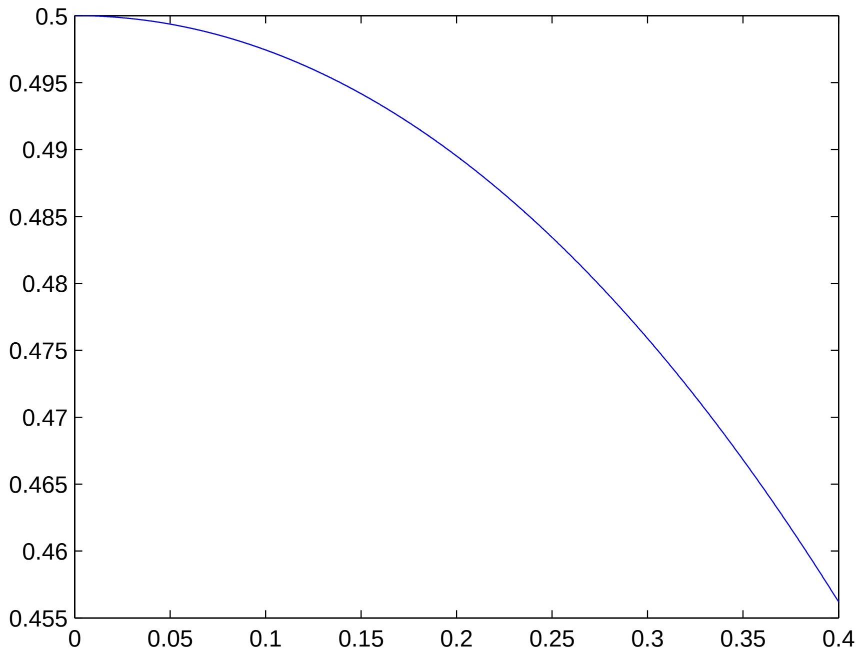

Figura 1: Aproximação para a solução do PVI estudado

Exercício 01

Considere o método de Euler aplicado ao PVI

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1,$$

que tem como solução $y(t) = e^t$.

a) Mostre que é possível escrever as iterações do método de Euler com passo h como

$$y_h(t_n) = (1+h)^{t_n/h}, \quad n \geq 0,$$

b) Conclua que, para h suficientemente pequeno, $y_h(t)$ converge pontualmente para a solução, ou seja, cada ponto da função de aproximação $y_h(t)$ converge para $y(t)$.

Exercício 02

Seja o PVI

$$y'(t) = 4 - 2t, \quad y(0) = 2,$$

que tem como solução $y(t) = -t^2 + 4t + 2$.

a) Encontre uma aproximação para $y(5)$ usando o método de Euler Aperfeiçoado, usando $h = 0.5,\ 0.25,\ 0.1$;

b) Compare os resultados com a solução exata do problema. Justifique;

c) O que você espera que aconteça se usar o método de Euler para resolver os itens anteriores? Justifique

Exercício 03

Dado o PVI

$$y'(t) - t^2 y + y, \quad y(0) = 1,$$

cuja solução é $y(t) = e^{x^3/3-x}$, responda os itens a seguir

a) Usando os métodos de Euler e Runge-Kutta de quarta ordem, encontre uma solução aproximada, tomando $h = 0.2$;

b) Compare graficamente a solução exata e as soluções obtidas com os métodos numéricos.

c) Use agora o método de Euler com $h = 0.1$ e compare o resultado com o obtido no item anterior.

Exercício 04

Calcule uma aproximação para o valor da integral definida

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx,$$

resolvendo analiticamente a integral (*dica*: Acompanhe [8, p. 900 – Exercício 40]). Depois, formule o problema como um PVI, usando a estrutura da função no integrando. Resolva numericamente o PVI obtido através método de Euler com passo $h = 0.1$.

Exercício 05

Encontre uma aproximação com quatro dígitos corretos para $y(0.1)$, onde $y(t)$ é solução da equação $y' = xy + 1$ e $y(0) = 1$

Exercício 06

A funcão $y(t)$ é defida pelo PVI

$$y'(t) = t^2 - y^2, \quad y(0) = 1.$$

Calcule $y(0.2)$ utilizando os seguintes métodos

a) Euler, com passo $h = 0.1$ e $h = 0.2$;

b) Ponto médio, $h = 0.1$;

c) Runge-Kutta de segunda ordem, com $h = 0.1$;

d) Série de Taylor, de segunda ordem, $h = 0.1$.

Exercício 07

Mostre que o método de Euler Modificado e o método do ponto médio resultam nas mesmas aproximações para o problema de valor inicial

$$y'(t) = -y + t + 1, \quad y(0) = 0,$$

no intervalo $t \in [0,\ 1]$, para qualquer escolha de h. Por que isto acontece?

Exercício 08

Mostre que, fazendo $k = 3$ na equação

$$y(x_{n+k}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+k}} f(x, y(x))dx$$

e usando a fórmula

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3(f(x_1) + f(x_2)) + f(x_3)],$$

obtem-se:

$$y_{n+3} = y_n + \frac{3h}{8}[f_n + 3(f_{n+1} + f_{n+2}) + f_{n+3}],$$

que é conhecido como o método $\dfrac{3}{8}$ de Simpson.

Exercício 09

Resolva o seguinte PVC usando o método de diferenças finitas

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t \\ y(0) = 2 \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

usando $h = 0.25$.

Exercício 10

Escreva uma discretização com aproximação de *segunda ordem* para a equação diferencial

$$\begin{cases} y''(t) + ty'(t) + y(t) = t^2 \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Prepare o esquema das equações resultantes que correspondem a tomar $h = 0.1$.

Exercício 11

Escreva os PVI abaixo como um sistema de equações diferenciais ordinárias.

a) $y''(t) + ty'(t) + t^2y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$;

b) $y''(t) + \cos(t)y'(t) + y(t) = e^{-t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$.

Exercício 12

Forneça uma aproximação para a solução do PVC abaixo, fazendo uso de um método para esse tipo de problema e o método de Newton para sistemas não lineares:

$$\begin{cases} y'' = 0.5y^3 \\ y(1) = -\dfrac{2}{3} \\ y(2) = -1, \end{cases}$$

para $x \in (1, 2)$ e $h = 0.05$.

Solução analítica: $y(x) = \dfrac{2}{x-4}$.

Referências

[1] R. Burden, J. Faires, and A. Burden, *Numerical analysis*, 8 ed., 2013.

[2] S. D. Conte and C. W. D. Boor, *Elementary numerical analysis: an algorithmic approach*, McGraw-Hill Higher Education, 1980.

[3] M. C. C. Cunha, *Métodos Numéricos*, Editora da Unicamp, 2000.

[4] G. Dahlquist and A. Björk, *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[5] N. B. Franco, *Cálculo numérico*, Pearson, 2006.

[6] C. B. Moler, *Numerical computing with MATLAB, electronic edition: The MathWorks*. `http://www.mathworks.com/moler/index_ncm.html`. último acesso em 28-01-2015.

[7] M. A. G. Ruggiero and V. L. d. R. Lopes, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*, Makron Books do Brasil, 1997.

[8] J. Stewart, *Cálculo*, vol. 2, São Paulo: Cengage Learning, 2013.