

MS 211 - LISTA DE EXERCÍCIOS No. 6

AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS

1. Ajuste, aos dados da tabela abaixo, as curvas: a) uma reta e b) uma parábola através do método dos quadrados mínimos.
- |        |     |     |     |     |     |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x$    | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   |
| $f(x)$ | 0.5 | 0.6 | 0.9 | 0.8 | 1.2 | 1.5 | 1.7 | 2.0 |

Qual das duas curvas melhor se ajusta aos dados no sentido dos quadrados mínimos? Justifique.

2. Dada a tabela abaixo, faça o gráfico de dispersão dos dados e ajuste uma curva da melhor maneira possível:
- |        |      |      |   |     |     |     |     |
|--------|------|------|---|-----|-----|-----|-----|
| $x$    | 0.5  | 0.75 | 1 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 |
| $f(x)$ | -2.8 | -0.6 | 1 | 3.2 | 4.8 | 6.0 | 7.0 |

3. A tabela mostra as alturas e pesos de uma amostra de nove pessoas entre as idades de 25 a 29 anos:
- |             |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| altura (cm) | 183 | 173 | 168 | 188 | 158 | 163 | 193 | 163 | 178 |
| peso (kg)   | 79  | 69  | 70  | 81  | 61  | 63  | 79  | 71  | 73  |

a) através do diagrama de dispersão dos dados observe que parece existir uma relação linear entre a altura e o peso.

b) ajuste uma reta que descreva o comportamento do peso em função da altura.

c) estime o peso de uma pessoa com 175 cm de altura e estime a altura de uma pessoa com 80 kg.

d) ajuste a reta que descreve o comportamento da altura em função do peso.

e) resolva o item (c) com esta nova função e compare os resultados obtidos.

4. Considere a tabela:
- |     |    |    |    |    |   |   |   |
|-----|----|----|----|----|---|---|---|
| $x$ | -8 | -6 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 |
| $y$ | 30 | 10 | 9  | 6  | 5 | 4 | 4 |

a) ajuste a curva  $1/(a_0 + a_1x)$  a estes dados. Faça o gráfico para  $1/y$  e verifique que a curva escolhida é viável, uma vez que à função  $1/y$  se ajustaria uma reta.

b) repita o item (a) para a curva  $ab^x$ .

c) qual das duas curvas melhor se ajusta aos dados. Por que?

5. O número de bactérias por unidade de volume, existente em uma cultura após  $x$  horas é apresentado na tabela:

$n^\circ$ de horas ( $x$ )	0	1	2	3	4	5	6
$n^\circ$ de bactérias por vol. unitário ( $y$ )	32	47	65	92	132	190	275

a) verifique que uma curva para se ajustar ao diagrama de dispersão é do tipo exponencial.

b) ajuste aos dados as curvas  $y \simeq ab^x$  e  $y \simeq ax^b$ . Escolha uma das curvas para representar os dados e justifique sua escolha.

c) avalie da melhor forma o valor de  $y(x)$  para  $x = 7$ .

6. Considere :
- |     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $x$ | 2    | 5    | 8    | 10   | 14   | 17   | 27   | 31   | 35   | 44   |
| $y$ | 94.8 | 98.7 | 81.3 | 74.9 | 68.7 | 64.0 | 49.3 | 44.0 | 39.1 | 31.6 |

a) Através do teste de alinhamento, escolha uma das famílias de funções abaixo que melhor ajusta estes dados:  $ae^{bx}$ ,  $1/(a + bx)$ ,  $x/(a + bx)$ .

b) Ajuste os dados do item acima à família de funções escolhida. Qual o resíduo minimizado?

7. Aproxime a tabela abaixo por uma função do tipo  $g(x) = 1 + a \exp(bx)$  usando quadrados mínimos. Discuta seus resultados.
- |     |     |     |     |      |      |
|-----|-----|-----|-----|------|------|
| $x$ | 0   | 0.5 | 1.0 | 2.5  | 3.0  |
| $y$ | 2.0 | 2.6 | 3.7 | 13.2 | 21.0 |

8. Considere a tabela :  $\frac{t}{u} \left| \begin{array}{cccccc} -9 & -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 30 & 10 & 9 & 6 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right.$ . Por qual das funções  $x(t) = t/(at + b)$  ou  $y(t) = ab^t$  você aproximaria a função  $u(t)$ ? Justifique a sua resposta.

9. A tabela abaixo fornece o número de habitantes do Brasil (em milhões) desde 1960:

ano ( $t$ )	1960	1970	1980	1991	2000
habitantes $p(t)$	70.2	93.1	119.0	146.2	169.8

Obs.: Foi realizada uma troca de variáveis (ano para  $t$ ), portanto, resolva os itens com a variável  $t$  e faça a conversão para dar as respostas.

a) Ajuste aos dados uma curva do tipo:  $\varphi(t) = \alpha_1 t^{\alpha_2}$ , através do processo dos quadrados mínimos. Use esta curva e obtenha uma estimativa da população do Brasil no ano 2010.

b) Ajuste aos dados uma curva do tipo:  $\varphi(t) = \alpha_1 e^{\alpha_2 t}$ , através do processo dos quadrados mínimos. Use esta curva e obtenha uma estimativa da população do Brasil no ano 2010.

c) Comparando os resíduos em cada caso, indique qual a melhor curva para ajustar os dados destes recenseamentos.

10. Considere a tabela:  $\frac{x}{y} \left| \begin{array}{cccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right.$ . Deseja-se aproximar a função  $y(x)$  tabelada nos pontos distintos  $(x_i, y_i)$  para  $i = 1, \dots, m$ . Podemos fazer a regressão linear de  $y$  por  $x$  obtendo  $y = ax + b$ . Podemos também fazer a regressão linear de  $x$  por  $y$  obtendo  $x = cy + d$ . Você espera que as retas coincidam ou não? Justifique.

11. Considere o sistema linear sobredeterminado:  $Ax = b$ , onde  $A : m \times n$  com  $m > n$ . Tais sistemas, em geral, não admitem solução. No entanto, nestes casos, o objetivo é encontrar a solução de quadrados mínimos: aquela para a qual se tem a soma dos quadrados dos resíduos  $(\sum_{i=1}^m r_i^2)$  mínima, onde  $r_i$  é a componente  $i$  do vetor  $r = b - Ax$ . Encontre a solução de quadrados mínimos para o sistema linear sobredeterminado:  $Ax = b$ ,  $A = [1 \ 3; 7 \ 9; -3 \ 2; 1 \ 8]$  e  $b = [5; 9; -1; 2]$ . Calcule  $(\sum_{i=1}^4 r_i^2)$ . Troque o vetor  $b$  por  $[-2; -2; -5; -7]$  e obtenha a solução de quadrados mínimos para este novo sistema linear. Observe que neste caso se tem  $(\sum_{i=1}^m r_i) = 0$ . Por que?