

MS 211 - LISTA DE EXERCÍCIOS
Ajuste de curvas por Quadrados Mínimos

1. Ajuste, aos dados da tabela abaixo, as curvas: a) uma reta e b) uma parábola através do método dos quadrados mínimos.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0.5	0.6	0.9	0.8	1.2	1.5	1.7	2.0

Qual das duas curvas melhor se ajusta aos dados no sentido dos quadrados mínimos? Justifique.

2. Dada a tabela abaixo, faça o gráfico de dispersão dos dados e ajuste uma curva da melhor maneira possível:

x	0.5	0.75	1	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	-2.8	-0.6	1	3.2	4.8	6.0	7.0

3. A tabela mostra as alturas e pesos de uma amostra de nove pessoas entre as idades de 25 a 29 anos:

altura (cm)	183	173	168	188	158	163	193	163	178
peso (kg)	79	69	70	81	61	63	79	71	73

- (a) através do diagrama de dispersão dos dados observe que parece existir uma relação linear entre a altura e o peso.
- (b) ajuste uma reta que descreva o comportamento do peso em função da altura.
- (c) estime o peso de uma pessoa com 175 cm de altura e estime a altura de uma pessoa com 80 kg.
- (d) ajuste a reta que descreve o comportamento da altura em função do peso.
- (e) resolva o item (c) com esta nova função e compare os resultados obtidos.
4. Considere a tabela:

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4
y	30	10	9	6	5	4	4

- (a) ajuste a curva $1/(a_0 + a_1x)$ a estes dados. Faça o gráfico para $1/y$ e verifique que a curva escolhida é viável, uma vez que à função $1/y$ se ajustaria uma reta.
- (b) repita o item (a) para a curva ab^x .
- (c) qual das duas curvas melhor se ajusta aos dados. Por quê?
5. O número de bactérias por unidade de volume, existente em uma cultura após x horas é apresentado na tabela:

n° de horas (x)	0	1	2	3	4	5	6
n° de bactérias por vol. unitário (y)	32	47	65	92	132	190	275

- (a) verifique que uma curva para se ajustar ao diagrama de dispersão é do tipo exponencial.

- (b) ajuste aos dados as curvas $y \simeq ab^x$ e $y \simeq ax^b$. Escolha uma das curvas para representar os dados e justifique sua escolha.
- (c) avalie da melhor forma o valor de $y(x)$ para $x = 7$.

6. Considere:

x	2	5	8	10	14	17	27	31	35	44
y	94.8	98.7	81.3	74.9	68.7	64.0	49.3	44.0	39.1	31.6

- (a) Através do teste de alinhamento, escolha uma das famílias de funções abaixo que melhor ajusta estes dados: ae^{bx} , $1/(a + bx)$, $x/(a + bx)$.
- (b) Ajuste os dados do item acima à família de funções escolhida. Qual o resíduo minimizado?
7. Aproxime a tabela abaixo por uma função do tipo $g(x) = 1 + aexp(bx)$ usando quadrados mínimos. Discuta seus resultados.

x	0	0.5	1.0	2.5	3.0
y	2.0	2.6	3.7	13.2	21.0

8. Considere a tabela:

t	-9	-6	-4	-2	0	2	4
u	30	10	9	6	5	4	4

Por qual das funções $x(t) = t/(at + b)$ ou $y(t) = ab^t$ você aproximaria a função $u(t)$? Justifique a sua resposta.

9. A tabela abaixo fornece o número de habitantes do Brasil (em milhões) desde 1960:

ano (t)	1960	1970	1980	1991	2000
habitantes $p(t)$	70.2	93.1	119.0	146.2	169.8

- (a) Ajuste aos dados uma curva do tipo: $\varphi(t) = \alpha_1(t - 1959)^{\alpha_2}$, através do processo dos quadrados mínimos. Use esta curva e obtenha uma estimativa da população do Brasil no ano 2010.
- (b) Ajuste aos dados uma curva do tipo: $\varphi(t) = \alpha_1 e^{\alpha_2(t-1959)}$, através do processo dos quadrados mínimos. Use esta curva e obtenha uma estimativa da população do Brasil no ano 2010.
- (c) Comparando os resíduos em cada caso, indique qual a melhor curva para ajustar os dados destes recenseamentos.
10. Considere a tabela:

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	-1	2	4

Deseja-se aproximar a função $y(x)$ tabelada nos pontos distintos (x_i, y_i) para $i = 1, \dots, m$. Podemos fazer a regressão linear de y por x obtendo $y = ax + b$. Podemos também fazer a regressão linear de x por y obtendo $x = cy + d$. Você espera que as retas coincidam ou não? Justifique.

11. Considere o sistema linear sobredeterminado: $Ax = b$, onde $A : m \times n$ com $m > n$. Tais sistemas, em geral, não admitem solução. No entanto, nestes casos, o objetivo é encontrar a solução de quadrados mínimos: aquela para a qual se tem a soma dos quadrados dos resíduos $\sum_{i=1}^m r_i^2$ mínima, onde r_i é a componente i do vetor $r = b - Ax$. Encontre a solução de quadrados mínimos para o sistema linear sobredeterminado: $Ax = b$, $A = [1 \ 3; 7 \ 9; -3 \ 2; 1 \ 8]$ e $b = [5; 9; -1; 2]$. Calcule $\sum_{i=1}^4 r_i^2$. Troque o vetor b por $[-2; -2; -5; -7]$ e obtenha a solução de quadrados mínimos para este novo sistema linear. Observe que neste caso se tem $\sum_{i=1}^m r_i = 0$. Por quê?