

MS 211 - LISTA DE EXERCÍCIOS No. 6

AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS

1. Ajuste, aos dados da tabela abaixo, as curvas: *a)* uma reta e *b)* uma parábola através do método dos quadrados mínimos.
- | | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $f(x)$ | 0.5 | 0.6 | 0.9 | 0.8 | 1.2 | 1.5 | 1.7 | 2.0 |

Qual das duas curvas melhor se ajusta aos dados no sentido dos quadrados mínimos? Justifique.

2. Dada a tabela abaixo, faça o gráfico de dispersão dos dados e ajuste uma curva da melhor maneira possível:
- | | | | | | | | |
|--------|------|------|---|-----|-----|-----|-----|
| x | 0.5 | 0.75 | 1 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 |
| $f(x)$ | -2.8 | -0.6 | 1 | 3.2 | 4.8 | 6.0 | 7.0 |

3. A tabela mostra as alturas e pesos de uma amostra de nove pessoas entre as idades de 25 a 29 anos:
- | | | | | | | | | | |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| altura (cm) | 183 | 173 | 168 | 188 | 158 | 163 | 193 | 163 | 178 |
| peso (kg) | 79 | 69 | 70 | 81 | 61 | 63 | 79 | 71 | 73 |

a) através do diagrama de dispersão dos dados observe que parece existir uma relação linear entre a altura e o peso.

b) ajuste uma reta que descreva o comportamento do peso em função da altura.

c) estime o peso de uma pessoa com 175 cm de altura e estime a altura de uma pessoa com 80 kg.

d) ajuste a reta que descreve o comportamento da altura em função do peso.

e) resolva o item (c) com esta nova função e compare os resultados obtidos.

4. Considere a tabela:
- | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|---|---|---|
| x | -8 | -6 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 |
| y | 30 | 10 | 9 | 6 | 5 | 4 | 4 |

a) ajuste a curva $1/(a_0 + a_1x)$ a estes dados. Faça o gráfico para $1/y$ e verifique que a curva escolhida é viável, uma vez que à função $1/y$ se ajustaria uma reta.

b) repita o item (a) para a curva ab^x .

c) qual das duas curvas melhor se ajusta aos dados. Por que?

5. O número de bactérias por unidade de volume, existente em uma cultura após x horas é apresentado na tabela:

n° de horas (x)	0	1	2	3	4	5	6
n° de bactérias por vol. unitário (y)	32	47	65	92	132	190	275

a) verifique que uma curva para se ajustar ao diagrama de dispersão é do tipo exponencial.

b) ajuste aos dados as curvas $y \simeq ab^x$ e $y \simeq ax^b$. Escolha uma das curvas para representar os dados e justifique sua escolha.

c) avalie da melhor forma o valor de $y(x)$ para $x = 7$.

6. Considere :
- | | | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x | 2 | 5 | 8 | 10 | 14 | 17 | 27 | 31 | 35 | 44 |
| y | 94.8 | 98.7 | 81.3 | 74.9 | 68.7 | 64.0 | 49.3 | 44.0 | 39.1 | 31.6 |

a) Através do teste de alinhamento, escolha uma das famílias de funções abaixo que melhor ajusta estes dados: ae^{bx} , $1/(a+bx)$, $x/(a+bx)$. *b)* Ajuste os dados do item acima à família de funções escolhida. Qual o resíduo minimizado?

7. Aproxime a tabela abaixo por uma função do tipo $g(x) = 1 + a \exp(bx)$ usando quadrados mínimos. Discuta seus resultados.

x	0	0.5	1.0	2.5	3.0
y	2.0	2.6	3.7	13.2	21.0

8. Considere a tabela : $\frac{t}{u} \left| \begin{array}{cccccc} -9 & -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 30 & 10 & 9 & 6 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right.$. Por qual das funções $x(t) = t/(at + b)$ ou $y(t) = ab^t$ você aproximaria a função $u(t)$? Justifique a sua resposta.

9. Considere a tabela: $\frac{x}{y} \left| \begin{array}{cccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right.$. Deseja-se aproximar a função $y(x)$ tabelada nos pontos distintos (x_i, y_i) para $i = 1, \dots, m$. Podemos fazer a regressão linear de y por x obtendo $y = ax + b$. Podemos também fazer a regressão linear de x por y obtendo $x = cy + d$. Você espera que as retas coincidam ou não? Justifique.

10. Considere o sistema linear sobredeterminado: $Ax = b$, onde $A : m \times n$ com $m > n$. Tais sistemas, em geral, não admitem solução. No entanto, nestes casos, o objetivo é encontrar a solução de quadrados mínimos: aquela para a qual se tem a soma dos quadrados dos resíduos $(\sum_{i=1}^m r_i^2)$ mínima, onde r_i é a componente i do vetor $r = b - Ax$. Encontre a solução de quadrados mínimos para o sistema linear sobredeterminado: $Ax = b$, $A = [1 \ 3; 7 \ 9; -3 \ 2; 1 \ 8]$ e $b = [5; 9; -1; 2]$. Calcule $(\sum_{i=1}^4 r_i^2)$. Troque o vetor b por $[-2; -2; -5; -7]$ e obtenha a solução de quadrados mínimos para este novo sistema linear. Observe que neste caso se tem $(\sum_{i=1}^m r_i) = 0$. Por que?

Recenseamento: dados da população do Brasil e estimativas

A tabela abaixo fornece o número de habitantes do Brasil (em milhões) desde 1872:

ano	1872	1890	1900	1920	1940	1950	1960	1970	1980	1991
habitantes	9.9	14.3	17.4	30.6	41.2	51.9	70.2	93.1	119.0	146.2

a) Ajuste à tabela, um polinômio de grau 2, no sentido dos quadrados mínimos. Observe que é necessário realizar uma mudança de escala para evitar trabalhar com valores como 1872, 1900, ... Trace o gráfico deste polinômio. Calcule a soma dos quadrados dos resíduos. Use este polinômio para estimar a população em 1985 e no ano 2000.

b) Analisando o diagrama de dispersão dos dados, escolha uma curva de ajuste que seja não linear nos parâmetros, mas que possa ser linearizada de modo que a curva de ajuste do problema linear possa ser obtida através do processo dos quadrados mínimos. Obtenha a expressão analítica desta curva. Calcule a soma dos quadrados dos resíduos e trace o gráfico da curva obtida. Compare os resíduos em cada caso: curva do item (a) e do item (b).

c) Obtenha uma estimativa para a população brasileira no ano em que você nasceu e no ano 2000, usando as duas curvas de ajuste. Analise seu resultado.

d) Analisando a tabela observa-se que a população brasileira ultrapassou a marca de 100 milhões na década de 70. Use uma das curvas obtidas para obter aproximadamente este ano.

e) Repita os itens anteriores considerando os dados populacionais a partir de 1950 e compare com os resultados obtidos.