MS 211 – Calculo Numérico
Lista 06

Quadrados Mínimos

Motivação

Este exerício foi retirado de [2].

A Lei de Hooke relaciona o deslocamento de uma mola com a força aplicada nela. Esta relação é linear até um valor de deslocamento (e força). A partir deste ponto, a mola é deformada de tal maneira que a relação deixa de ser linear e a deformação passa a ser permanente. A constante de proporcionalidade k entre força e deslocamento depende da mola, e pode ser determinada experimentalmente. A Tabela 1 mostra os valores experimentais obtidos aplicando determinadas forças na mola e medindo a deformação causada. Ajuste uma reta na porção linear dos dados e encontre o valor de k da mola. Depois, ajuste uma função da forma $f(x) = ab^x$ e encontre uma relação para a porção não linear do sistema massa-mola.

Tabela 1: Dados experimentais para encontrar a constante de uma mola

Força (10^4 N)	Deformação (m)
10	0.10
20	0.17
30	0.27
40	0.35
50	0.39
60	0.42
70	0.43
80	0.44

Solução:

Primeiramente, a Figura 1 mostra a o gráfico dos dados experimentais, onde o eixo-x é a deformação. Note que os primeiros quatro dados da tabela tem um comportamento linear e, a partir dele, o comportamento fica não linear. Usando os quatro primeiros pontos podemos ajustar uma reta segundo quadrados mínimos, obtendo $r(x) = -1.0682 + 117.1606x$, e assim a constante da mola deve ser $k = 117.1606 \times 10^4$ N/m

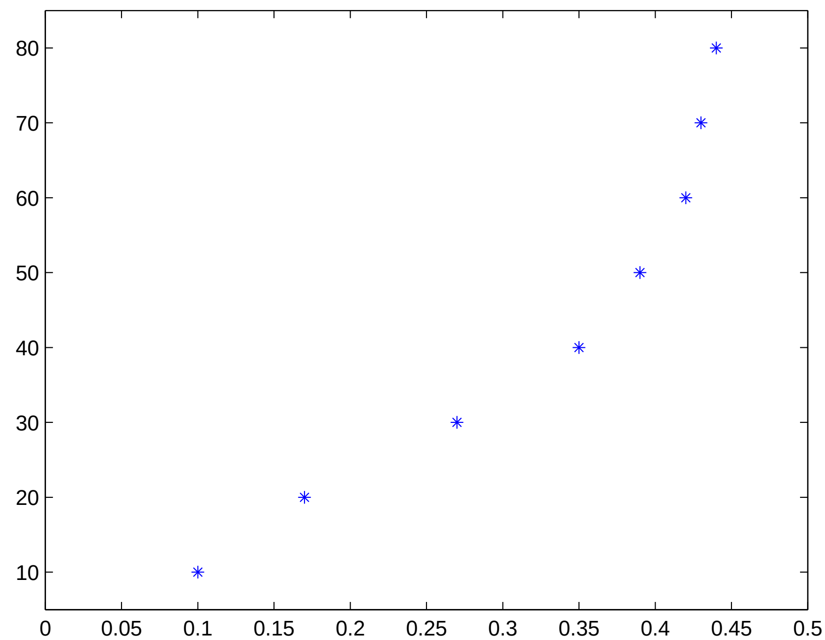

Figura 1: Gráfico dos dados a partir da Tabela 1

Para o ajuste não linear, devemos primeiro aplicar uma transformação para linearizar a equação. Assim

$$\ln(f(x)) = \ln(ab^x) = \ln(a) + x\ln(b).$$

Assim, tomando os dados a partir de 0.35, vamos obter uma reta da forma $s(y) = 1.0809 + 7.3504y$, onde $1.0809 = \ln(a)$ e então $a = 2.9473$, $\ln(b) = 7.3504$ e $b = 1556.81$.

Exercício 01

A quantidade de números primos menores que x é denotado por $\Pi(x)$ e vale a tabela:

x	100	1000	10000	100000
$\Pi(x)$	25	168	1229	9592

(a) Determinar pelo método dos Quadrados Mínimos, para os dados acima, expressão do tipo:

$$\Pi(x) = a + b\frac{x}{\log_{10} x}.$$

(b) Estimar o número de números primos de 6 dígitos usando o item (a).

Exercício 02

Encontre polinômios de grau 1, 2 e 3 que minimizam o resíduo na aproximação dos dados da tabela abaixo. Qual deles proporcionou um melhor resultado?

x	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
$\Pi(x)$	1.0	1.04	1.031	1.117	1.223	1.442

Exercício 03

Mostre que a inclinação da linha que passa pela origem e está mais próxima, no sentido de Quadrados Mínimos, do conjunto de pontos $\{(x_1,\, y_1), (x_2,\, y_2), \ldots, (x_n,\, y_n)\}$ é dada por

$$m = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}.$$

Exercício 04

O número de bactérias, por unidade de volume, existente em uma cultura após x horas é apresentado na tabela:

x	0	1	2	3	4	5	6
$\Pi(x)$	32	47	65	92	132	190	275

a) Verifique que a curva que se ajusta ao diagrama dado é do tipo exponencial;

b) Ajuste aos dados as curvas $y = ab^x$ e $y = ax^b$ e compare os valores obtidos;

c) Avalie da melhor forma o valor para $x = 7$.

Exercício 05

Deduza o sistema que determina os coeficientes que ajustam um polinômio cúbico $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ a uma tabela de pontos $(x_i,\, y_i)$, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

Exercício 06

Temos a seguinte tabela de dados obtidos a partir da *função erro* (também conhecida como Função erro de Gauss)

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\text{erf}(x)$	0	0.1125	0.2227	0.3286	0.4284	0.5205	0.6039	0.6778	0.7421	0.7969	0.8427

a) Aproxime a tabela acima por polinômios de grau 1 a 6, aplique os polinômios nos pontos da tabela e compare com os valores dados.

b) Exiba o resíduo de cada aproximação, e compare a relação entre eles. O que você consegue perceber?

c) Aproxime os dados usando a seguinte função

$$\text{erf}(x) \approx c_1 + e^{-x^2}(c_2 + c_3 z + c_4 z^2 + c_5 z^3),$$

onde $z = (1 + x)^{-1}$. Compare o resultado do resíduo com os itens anteriores. Justifique suas conclusões.

Exercício 07

Considere os seguintes dados tabelados

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	-1	-2	-4

a) Encontre a e b tais que $y \approx ax + b$ no sentido de Quadrados Mínimos.

b) Encontre c e d tais que $x \approx cy + d$ no sentido de Quadrados Mínimos.

c) Qual a relação você esperaria entre os valores a, b, c e d? Esta relação ocorre? Justifique.

Exercício 08

Encontre e represente graficamente a elipse que mais se aproxima (no sentido de Quadrados Mínimos) dos valores dados na tabela abaixo

x	-3.7570	-3.8621	3.7720	3.0135	-0.3139	-1.0932	-1.4773
y	0.3732	-0.1985	-0.3635	-0.6275	1.0912	0.9940	-0.8638

Exercício 09

Verifique que as funções não lineares a seguir podem ser linearizadas por transformações matemáticas. Explicite a relação entre a função original e a linearizada.

a) $f(x) = \dfrac{a_1}{a_2 x + a_3}$;

b) $f(x) = 1 + \dfrac{a_1}{x^2 + a_2}$;

c) $f(x) = \ln(a_1 + a_2 x^2)$.

Exercício 10

Seja $\beta = \{v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_k\}$ vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, com $k < n$. Formule como um problema de quadrados mínimos o problema de encontrar o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ que mais se aproxima do espaço gerado por β. Dê um exemplo geométrico. Em qual subespaço está contido o vetor resíduo?

Referências

[1] R. Burden, J. Faires, and A. Burden, *Numerical analysis*, 8 ed., 2013.

[2] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical methods for engineers*, McGraw-Hill, 1998.

[3] S. D. Conte and C. W. D. Boor, *Elementary numerical analysis: an algorithmic approach*, McGraw-Hill Higher Education, 1980.

[4] M. C. C. Cunha, *Métodos Numéricos*, Editora da Unicamp, 2000.

[5] G. Dahlquist and A. Björk, *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[6] N. B. Franco, *Cálculo numérico*, Pearson, 2006.

[7] C. B. Moler, *Numerical computing with MATLAB, electronic edition: The MathWorks*. `http://www.mathworks.com/moler/index_ncm.html`. último acesso em 28-01-2015.

[8] M. A. G. Ruggiero and V. L. d. R. Lopes, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*, Makron Books do Brasil, 1997.