MS 211 – LISTA DE EXERCICIOS No. 7 – INTERPOLAÇÃO

1. Dada a tabela abaixo, calcule $e^{3.1}$ usando um polinômio de interpolação sobre três pontos (use a forma de Lagrange para o polinômio) e dê um limitante superior para o erro cometido.

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
e^x	11.02	13.46	16.44	20.08	24.53	29.96	36.59	44.70

2. A seguinte tabela relaciona calor específico da água e temperatura:

temperatura (^{o})	20	25	30	35	40	45	50
calor espec.	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

Resolver os itens abaixo através de um processo de interpolação quadrática:
a) o calor específico da água a 32.5^o;
b) a temperatura para a qual o calor específico é 0.99837.

3. Dados

w	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
$f(w)$	0.905	0.819	0.67	0.549	0.449	0.407

x	1	1.2	1.4	1.7	1.8
$g(x)$	0.210	0.320	0.480	0.560	0.780

Calcule o valor aproximado de x tal que $f(g(x)) = 0.6$, usando polinômios interpolantes de grau 2.

4. Consideremos o problema de interpolação para $sen(x)$, numa tabela de pontos igualmente espaçados com intervalo h, usando um polinômio de grau 2. Fazendo $x_0 = -h, x_1 = 0$ e $x_2 = h$, mostre que: $|E(x)| \leq (\sqrt{3}/27)h^3$.

5. Sabendo–se que a equação $x - \exp(-x) = 0$ admite uma raiz no intervalo $(0, 1)$, determine o valor desta raiz usando interpolação quadrática.

6. Com que grau de precisão podemos calcular $\sqrt{115}$ usando interpolação sobre os pontos $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$?

7. Seja a tabela:

x	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
$f(x)$	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27

Usando um polinômio de grau 2, trabalhe de dois modos diferentes para obter o valor estimado de x para o qual $f(x) = 0.23$. Sabendo que a função é inversível e que $\max |f'''(x)| < 10$, dê um limitante superior para o erro cometido. Este limitante pode ser aplicado para os dois modos de resolver o problema? Justifique.

8. Construa uma tabela para a função $f(x) = \cos(x)$ usando os pontos: $0.8, 0.9, 1.1, 1.2, 1.3$. Obtenha um polinômio de grau 3 para estimar $\cos(1.07)$ e forneça um limitante superior para o erro.

9. Seja a tabela:

x	-1	0	1	3
$f(x)$	a	b	c	d

e seja $p_n(x)$ o polinômio que interpola $f(x)$ em $-1, 0, 1$ e 3. Imponha condições sobre a, b, c, d para que se obtenha um polinômio de grau 2.

10. Considere a tabela

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1.0	1.2408	1.5735	2.0333	2.6965	3.7183

. Usando um polinômio interpolador de grau 3 determine x tal que $f(x) = 2.3$. Justifique a escolha do processo.

11. Considere a tabela:

x	0	1.2	2.3	3.1	3.9
$f(x)$	0	1.5	5.3	9.5	10

. Dê uma aproximação para a raiz da equação $f(x) = 2$ utilizando interpolação quadrática. Tente encontrar mais de uma maneira de resolver este problema.

12. Considere a função $f(x)$ tabelada nos pontos abaixo:

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	0.91	1.43	1.58	1.55	1.44	1.30	1.18

a) Obtenha uma aproximação para o valor máximo de $f(x)$ usando interpolação quadrática. Justifique a escolha dos pontos.
b) Usando interpolação linear, obtenha uma aproximação para a solução da equação $f(x) - 1.15 = 0$ no intervalo $[1,\ 7]$.

13. Queremos construir uma tabela que contenha valores de $\cos(x)$ para pontos igualmente espaçados no intervalo I$= [1, 2]$. Qual deve ser o menor número de pontos desta tabela para se obter, a partir dela, o $\cos(x)$, usando interpolação linear com erro menor que 10^{-6} para qualquer $x \in [1, 2]$?

COMANDOS DO MATLAB PARA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Dada uma tabela com $(r+1)$ pontos distintos: $x_0, x_1, \ldots, x_r$ e os respectivos valores da função $f(x)$: $y_0, y_1, \ldots, y_r$. Se x é o vetor com os valores dos pontos tabelados e y o vetor com os valores da função, então, o comando:
`p = polyfit(x,y,n)`
devolve no vetor p os $n+1$ coeficientes do polinômio de grau $\leq n$ que se ajusta aos dados (x, y) no sentido dos quadrados mínimos, sendo que este polinômio estará escrito na forma: $p_1 x^n + p_2 x^{n-1} + \ldots + p_{n+1}$. Observe que, se $n = r$ este comando obtém o polinônimo que interpola $f(x)$ nestes pontos. Por que? (para responder a esta pergunta, resolva o exercício (1) desta lista).

Teste o comando acima, usando a tabela:

x	0	1	2	3
y	1	1.3679	4.1353	9.0498

A sequência de comandos:
`x = [ 0 1 2 3];y = [ 1 1.3679 4.1353 9.0498]; p = polyfit(x,y,3)`
devolve como resultado: `p = (-0.0421 1.3259 -0.9160 1.0000)` indicando que o polinônimo de grau 3 que interpola $f(x)$ nos pontos dados é: $-0.0421x^3 + 1.3259x^2 - 0.9160x + 1$
Obtido o vetor p, o comando: `a = polyval(p,1.7)` devolve em a, o valor do polinômio em 1.7.
Para plotar o gráfico dos pontos tabelados e do polinômio, realiza–se a sequência de comandos:
`w = -1:0.1:5; z = polyval(p,w); plot(x,y,'*',w,z)`
Onde: w é um vetor onde o polinômio será avaliado para que seu gráfico possa ser plotado. Os elementos de w são: $-1, -0.9, -0.8, \ldots, 4.8, 4.9, 5$. Observe que o intervalo $[-1, 5]$ onde o polinômio será avaliado, deve conter o intervalo $[0, 3]$ onde a função $f(x)$ foi tabelada.

O comando `interp1` também realiza interpolação e já avalia a curva de ajuste num conjunto de pontos que devem estar no intervalo $[x_0, x_n]$. Considerando a tabela anterior e o vetor w definido como: , o comando
l `= interp1(x,y,w,'linear')`
devolve no vetor l, os valores dos polinômios que grau 1 que interpolam $f(x)$ em x_0 e x_1, x_1 e x_2 e em x_2 e x_3.
O comando c `= interp1(x,y,w,'cubic')`
devolve no vetor c os valores do polinômio de grau 3 que interpola $f(x)$ nos quatro pontos tabelados, sendo que estes valores são calculados para todas as componentes do vetor w. E, o comando
s `= interp1(x,y,w,'spline')`
devolve no vetor s o valor da *spline cúbica interpolante em* x_0*,* x_1*,* x_2 *e* x_3 avaliada nos elementos do vetor w.