MS 211 – LISTA DE EXERCICIOS No. 7 – INTERPOLAÇÃO

1. Considere uma função $f(x)$ conhecida apenas em alguns pontos:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

Deseja–se estimar $f(a)$, $a \in (x_0, x_n)$. Compare os resultados que seriam obtidos quando aproximamos $f(x)$ por:
*a)*um polinômio que interpola $f(x)$ nos $n+1$ pontos;
*b)*uma função da forma $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$ obtida através do processo dos quadrados mínimos.

2. Dada a tabela abaixo, calcule $e^{3.1}$ usando um polinômio de interpolação sobre três pontos e dê um limitante superior para o erro cometido.

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
e^x	11.02	13.46	16.44	20.08	24.53	29.96	36.59	44.70

3. Dados

w	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
$f(w)$	0.905	0.819	0.67	0.549	0.449	0.407

x	1	1.2	1.4	1.7	1.8
$g(x)$	0.210	0.320	0.480	0.560	0.780

Calcule o valor aproximado de x tal que $f(g(x)) = 0.6$, usando polinômios interpolantes de grau 2.

4. Queremos construir uma tabela que contenha valores de $\cos(x)$ para pontos igualmente espaçados no intervalo I$= [1, 2]$. Qual deve ser o menor número de pontos desta tabela para se obter, a partir dela, o $\cos(x)$, usando interpolação linear com erro menor que 10^{-6} para qualquer $x \in [1, 2]$?

5. Sabendo–se que a equação $x - \exp(-x) = 0$ admite uma raiz no intervalo $(0, 1)$, determine o valor desta raiz usando interpolação quadrática.

6. Com que grau de precisão podemos calcular $\sqrt{115}$ usando interpolação sobre os pontos $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$?

7. Seja a tabela:

x	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
$f(x)$	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27

Usando um polinômio de grau 2, trabalhe de dois modos diferentes para obter o valor estimado de x para o qual $f(x) = 0.23$.

8. Seja a tabela:

x	-1	0	1	3
$f(x)$	a	b	c	d

e seja $p_n(x)$ o polinômio que interpola $f(x)$ em $-1, 0, 1$ e 3. Imponha condições sobre a, b, c, d para que se obtenha um polinômio de grau 2.

9. Considere a tabela

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1.0	1.2408	1.5735	2.0333	2.6965	3.7183

Usando um polinômio interpolador de grau 3 determine x tal que $f(x) = 2.3$. Justifique a escolha do processo.

10. Considere a tabela:

x	0	1.2	2.3	3.1	3.9
$f(x)$	0	1.5	5.3	9.5	10

. Dê uma aproximação para a raiz da equação $f(x) = 2$ utilizando interpolação quadrática. Tente encontrar mais de uma maneira de resolver este problema.

COMANDOS DO MATLAB PARA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Dada uma tabela com $(r + 1)$ pontos distintos: $x_0, x_1, \ldots, x_r$ e os respectivos valores da função $f(x)$: $y_0, y_1, \ldots, y_r$. Se x é o vetor com os valores dos pontos tabelados e y o vetor com os valores da função, então, o comando:
`p = polyfit(x,y,n)` devolve no vetor p os $n+1$ coeficientes do polinômio de grau $\leq n$ que se ajusta aos dados (x, y) no sentido dos quadrados mínimos, sendo que este polinônimo estará escrito na forma: $p_1x^n + p_2x^{n-1} + \ldots + p_{n+1}$. Observe que, se $n = r$ este comando obtém o polinônimo que interpola $f(x)$ nestes pontos. Por que? (para responder a esta pergunta, resolva o exercício (1) desta lista).

Teste o comando acima, usando a tabela:

x	0	1	2	3
y	1	1.3679	4.1353	9.0498

A sequência de comandos:
`x = [ 0 1 2 3];y = [ 1 1.3679 4.1353 9.0498]; p = polyfit(x,y,3)` devolve como resultado: `p = (-0.0421 1.3259 -0.9160 1.0000)` indicando que o polinônimo de grau 3 que interpola $f(x)$ nos pontos dados é: $-0.0421x^3 + 1.3259x^2 - 0.9160x + 1$
Obtido o vetor p, o comando: `a = polyval(p,1.7)` devolve em a, o valor do polinômio em 1.7. Para plotar o gráfico dos pontos tabelados e do polinômio, realiza–se a sequência de comandos:
`w = -1:0.1:5; z = polyval(p,w); plot(x,y,'*',w,z)`
Onde: w é um vetor onde o polinômio será avaliado para que seu gráfico possa ser plotado. Os elementos de w são: $-1, -0.9, -0.8, \ldots, 4.8, 4.9, 5$. Observe que o intervalo $[-1, 5]$ onde o polinômio será avaliado, deve conter o intervalo $[0, 3]$ onde a função $f(x)$ foi tabelada.

O comando `interp1` também realiza interpolação e já avalia a curva de ajuste num conjunto de pontos que devem estar no intervalo $[x_0, x_n]$. Considerando a tabela anterior e o vetor w definido como: , o comando
l `= interp1(x,y,w,'linear')` devolve no vetor l, os valores dos polinômios que grau 1 que interpolam $f(x)$ em x_0 e x_1, x_1 e x_2 e em x_2 e x_3.
O comando c `= interp1(x,y,w,'cubic')` devolve no vetor c os valores do polinômio de grau 3 que interpola $f(x)$ nos quatro pontos tabelados, sendo que estes valores são calculados para todas as componentes do vetor w. E, o comando
s `= interp1(x,y,w,'spline')` devolve no vetor s o valor da *spline cúbica interpolante em* x_0, x_1, x_2 *e* x_3 avaliada nos elementos do vetor w.

Exercício:

Use os comandos `polyfit, polyval e interp1` para ajustar uma curva aos dados da população do Brasil (lista de exercícios 5). Use o comando `plot` para plotar os gráficos obtidos. Estime a população do Brasil no ano 2000, usando as curvas obtidas. É possível realizar esta estimativa usando o comando `interp1` com as opções: linear e cúbica? É importante realizar uma troca de variáveis para evitar trabalhar com número grandes como 1970. Sugestões: troque cada ano t por: $(t - 1900)$ ou então por $(t - 1945)$.
