MS 211 – Calculo Numérico
Lista 07

Interpolação polinomial

Motivação

A Tabela 1 mostra a variação na população da cidade de Campinas, registrada pelo censo do IBGE nos últimos anos. Calcule, usando interpolação polinomial:

Tabela 1: População de Campinas

Ano	População
1991	847595
1996	903462
2000	969396
2007	1039297
2010	1080113

a) A população de Campinas em 2004;

b) Uma estimativa para a população de Campinas em 2015;

c) O momento (mês e ano) em que a população de Campinas era de 1 milhão de habitantes.

Solução:

Usaremos os cinco pontos dados e ajustaremos usando um polinômio de grau 4. Primeiramente, vamos usar uma escala para ajustar os valores da primeira coluna, que representa o ano que foi feito o censo. Fazendo

$$\mathbf{x} = \frac{\textbf{ano} - 1991}{2010 - 1991}. \tag{1}$$

Podemos ajustar também os valores de população, trabalhando na escala de 10^5. Assim, os valores passam a ser:

$$\mathbf{x} = (0, 0.26316, 0.47368, 0.84211, 1)^\top$$
$$\mathbf{y} = (8.47595, 9.03462, 9.69396, 10.39297, 10.80113)^\top$$

Usando algum dos métodos de interpolação, conseguimos escrever um (único) polinômio de grau 4 que passe pelos pontos $(\mathbf{x}_\imath, \mathbf{y}_\imath)$, $\imath = 1 : 5$

$$p(x) = 8.47595 - 0.08975x + 13.10894x^2 - 20.42281x^3 + 9.72886x^4.$$

A partir deste polinômio, calculamos as aproximações para os itens.

a) Para o cálculo da população campineira no ano de 2004, usamos a transformação dada em (1), obtendo $x = 0.68421$. Portanto $p(0.68421) = 10.14196$, ou seja, a população em 2004 deveria ser de aproximadamente 1014196 habitantes.

b) Repetindo os mesmos cálculos do item anterior, vemos que o ano de 2015 reescalado corresponde a $x = 1.26315$, e $p(1.26315) = 12.88552$.

c) Podemos responder este item de duas maneiras distintas. Uma delas é interpolar usando o valor da população como variável. Assim, interpolamos novamente e encontramos o valor do polinômio no ponto que a população é 1 milão. Outra maneira é usar $p(x) = 10$ e encontrar as raízes no intervalo $[0, 1]$. Usando o primeiro método, obtemos

$$q(y) = 1.991 + 0.035748y - 0.09393y^2 + 0.14956y^3 - 0.07238y^4,$$

onde o valor da população foi reescalado para o intervalo $[0, 1]$. Então, o valor 1 milhão, corresponde a $y = 0.65545$, que tem como solução $q(0.65545) = 2.00283$, que corresponde ao mês de setembro do ano de 2002.

Exercício 01

Considere o problema de interpolação para $f(x) = \text{sen}(x)$, numa tabela de pontos igualmente espaçados com intervalo h, usando um polinômio de grau 2. Fazendo $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ e $x_2 = h$, mostre que:

$$|E(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27}\, h^3.$$

Exercício 02

Sabendo que a equação $x - e^{-x} = 0$ admite uma raiz num intervalo $(0, 1)$, aproxime o valor desta raiz usando interpolação quadrática. Compare o valor obtido com a solução obtida usando algum método para zero de funções (Newton, bissecção ou secantes).

Exercício 03

Mostre que o erro máximo da interpolação linear de uma função $f(x)$ nos pontos x_0 e x_1 ocorre no ponto médio e que

$$|f(x) - p_1(x)| \leq (x_0 - x_1)^2 \frac{M}{8}, \quad |f''(x)| \leq M \quad \text{em } [x_0,\, x_1].$$

Exercício 04

Seja

$$p_n(x) = \sum_{\imath=0}^{n} \ell_\imath(x) f(x_\imath),$$

o polinômio interpolador da função $f(x)$ nos pontos $x_\imath$, $\imath = 0, \ldots, n$ e $\ell_i(x)$ o $\imath$-ésimo polinômio interpolador de Lagrange associado. Mostre que

$$\sum_{\imath=0}^{n} \ell_\imath(x) = 1, \; \forall\, x.$$

Exercício 05

Quantos pontos são necessários para definir unicamente uma cônica não degenerada (elipse, hipérbole, parábola)? Responda usando argumentos baseados em interpolação polinomial.

Exercício 06

Determine o número total de operações que são necessárias para interpolar n pontos usando os polinômios de Lagrange. Faça o mesmo para os polinômios na forma de Newton. Compare os resultados.

Exercício 07

Considerando o seguinte conjunto de dados

x	0	1	2	3
$p(x)$	1	3	7	4

calcule:

a) O polinômio interpolador de Lagrange;

b) O polinômio interpolador de Newton;

c) O número de operações necessárias para calcular $p(2.5)$ nos dois casos;

d) Acrescentando o par $(4,\ 5)$ ajuste novamente uma outra curva, usando os dois métodos. O que você observou quanto ao aproveitamento dos resultados já obtidos?

e) Veja o artigo [1] e utilize a técnica descrita para interpolar os dados iniciais, como em a) e b). Depois, refaça os itens c) e d) e compare os resultados.

Exercício 08

Considerando os dados das tabelas abaixo

w	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(w)$	0.84	0.66	0.77	0.45	0.32

x	1.3	1.5	1.6	1.8
$g(x)$	0.12	0.45	0.27	0.5

Calcule $f(g(x)) = 0.5$ usando polinômios de interpolação de segundo grau.

Exercício 09

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[-1,\ 1]$.

a) Encontre o polinômio $p(x)$ que interpole f em $\pm\sqrt{1/3}$;

b) Fazendo uso do polinômio $p(x)$ encontrado, aproxime a integral de $f(x)$ no intervalo dado;

c) Supondo $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, encontre uma aproximação para a integral de $f(x)$ no intervalo dado. Compare com o valor original.

Exercício 10

Usando os conceitos vistos de interpolação polinomial, verifique a existência e unicidade de um polinômio $p(x)$ de grau dois e três que satisfaçam as condições $p(0) = 1$, $p(1) = 3$ e $p'(0.5) = -1$.

Referências

[1] J.-P. Berrut and L. N. Trefethen, *Barycentric lagrange interpolation*, Siam Review, 46 (2004), pp. 501–517. Também disponível em `https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/barycentric.pdf`.

[2] R. Burden, J. Faires, and A. Burden, *Numerical analysis*, 8 ed., 2013.

[3] S. D. Conte and C. W. D. Boor, *Elementary numerical analysis: an algorithmic approach*, McGraw-Hill Higher Education, 1980.

[4] M. C. C. Cunha, *Métodos Numéricos*, Editora da Unicamp, 2000.

[5] G. Dahlquist and A. Björk, *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[6] N. B. Franco, *Cálculo numérico*, Pearson, 2006.

[7] C. B. Moler, *Numerical computing with MATLAB, electronic edition: The MathWorks*. `http://www.mathworks.com/moler/index_ncm.html`. último acesso em 28-01-2015.

[8] M. A. G. Ruggiero and V. L. d. R. Lopes, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*, Makron Books do Brasil, 1997.