Lista de Exercícios 7
MS211 - 2020/S1
Integração Numérica

---

1. Calcule as integrais a seguir pela regra dos trapézios e 1/3 de Simpson, usando quatro e seis divisões de $[a, b]$. Obtenha um limitante superior para o erro cometido e compare com o valor exato, quando for possível.
a) $\int_1^2 \exp(x)dx$; *b)* $\int_1^4 \sqrt{x}dx$ *c)* $\int_2^{14} dx/\sqrt{x}$.

2. Usando as integrais do exercício anterior com quantas divisões do intervalo, no mínimo, podemos esperar obter erros menores que 10^{-5}?

3. Calcule o valor aproximado de $\displaystyle\int_0^{0.6} \frac{dx}{(1+x)}$ com três casas decimais de precisão usando Simpson e trapézios.

4. Qual o erro máximo cometido na aproximação de $\int_0^4 (3x^3 - 3x + 1)dx$ pela regra de Simpson com quatro subintervalos? Obtenha uma aproximação para esta integral pela regra dos trapézios.

5. Determinar h para que se possa avaliar $\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx$ com erro inferior a $\varepsilon = 10^{-3}$ pela regra de Simpson.

6. Use a regra de Simpson para integrar a função abaixo entre 0 e 2 com o menor esforço computacional possível (menor número de divisões e maior precisão). Justifique.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ (x+2)^3 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

7. A regra dos retângulos repetida é obtida quando aproximamos $f(x)$, em cada subintervalo, por um polinômio de interpolação de grau zero. Encontre a regra dos Retângulos bem como a expressão do erro, fazendo:
a) $p_0^j(x) = f(x_{j-1})$, $\quad j = 1, 2, \ldots, m$:
b) $p_0^j(x) = f(\dfrac{x_{j-1} + x_j}{2})$, $\quad j = 1, 2, \ldots, m$. Esta última é a regra do ponto médio e é uma fórmula aberta de Newton–Cotes.

8. *a)* Comprove gráfica e analiticamente que se:
i) $f''(x)$ é contínua em $[a, b]$ e
ii) $f''(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, então a aproximação obtida para $\int_a^b f(x)dx$ pela regra dos trapézios é maior que o valor exato desta integral. Considere $n = 1$.
b) Sabendo que $f(x) = \exp(x) + x^2$ satisfaz as condições acima em $[0, 1]$, e que $I = \int_0^1 (\exp(x) + x^2)dx = 2.051$, (trabalhando com três casas decimais), comprove que a conclusão do item *(a)* é válida também para a regra dos trapézios repetida, calculando I com erro inferior a 5×10^{-2}.

9. Dada a tabela:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1.0	1.2408	1.5735	2.0333	2.6965	3.7183

e, sabendo que a regra 1/3 de Simpson é, em geral, mais precisa que a dos trapézios, qual seria o modo mais adequado de calcular $I = \int_0^1 f(x)dx$, usando a tabela acima? Aplique este processo e determine esta integral.

10. Calcule, pela regra dos trapézios e de Simpson, cada uma das integrais abaixo, com erro menor do que ε dado:
a) $\int_0^{\pi} e^{\text{sen}x}dx$; $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$; *b)* $\int_1^{\pi/2} (\text{sen}x)^{1/2}dx$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

11. Usando a regra de Simpson, calcule o valor de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$ com precisão de 4 casas decimais. Compare o resultado com o valor de $\ln 2$.

12. Calcule π da relação $\pi/4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)}$ com erro inferior a 10^{-3} pela regra de Simpson.