MS 211 – LISTA DE EXERCICIOS No. 8 – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

1. Calcule as integrais a seguir pela regra dos trapézios e 1/3 de Simpson, usando quatro e seis divisões de $[a, b]$. Obtenha um limitante superior para o erro cometido e compare com o valor exato, quando for possível.
a) $\int_1^2 exp(x)dx$; *b)*$\int_1^4 \sqrt{x}dx$ *c)*$\int_2^{14} dx/\sqrt{x}$.

2. Usando as integrais do exercício anterior com quantas divisões do intervalo, no mínimo, podemos esperar obter erros menores que 10^{-5}?

3. Calcule o valor aproximado de $\displaystyle\int_0^{0.6} \frac{dx}{(1+x)}$ com três casas decimais de precisão usando Simpson e trapézios.

4. Qual o erro máximo cometido na aproximação de $\int_0^4 (3x^3 - 3x + 1)dx$ pela regra de Simpson com quatro subintervalos?

5. Determinar h para que se possa avaliar $\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx$ com erro inferior a $\varepsilon = 10^{-3}$ pela regra de Simpson.

6. Use a regra de Simpson para integrar a função abaixo entre 0 e 2 com o menor esforço computacional possível (menor número de divisões e maior precisão). Justifique.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ (x+2)^3 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

7. A regra dos retângulos repetida é obtida quando aproximamos $f(x)$, em cada subintervalo, por um polinômio de interpolação de grau zero. Encontre a regra dos Retângulos bem como a expressão do erro, fazendo:
a) $p_0^j(x) = f(x_{j-1}), \quad j = 1, 2, \ldots, m$:
b) $p_0^j(x) = f(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}), \quad j = 1, 2, \ldots, m$. Esta última é a regra do ponto médio e é uma fórmula aberta de Newton–Cotes.

8. Seja o problema: interpolar a função sen(x) sobre o intervalo $[0, \pi/4]$ usando um polinômio de grau 2 e integrar esta função, neste intervalo, usando a regra 1/3 de Simpson. Qual deve ser o menor número m de subintervalos em $[0, \pi/4]$ para se garantir um erro menor que 10^{-4} tanto na interpolação quanto na integração?

9. Dada a tabela:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1.0	1.2408	1.5735	2.0333	2.6965	3.7183

e, sabendo que a regra 1/3 de Simpson é, em geral, mais precisa que a dos trapézios, qual seria o modo mais adequado de calcular $I = \int_0^1 f(x)dx$, usando a tabela acima? Aplique este processo e determine esta integral.

10. Calcule, pela regra dos trapézios e de Simpson, cada uma das integrais abaixo, com erro menor do que ε dado:
a) $\int_0^{\pi} e^{\text{sen}x}dx$; $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$; *b)* $\int_1^{\pi/2} (\text{sen}x)^{1/2}dx$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

11. Usando a regra de Simpson, calcule o valor de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$ com precisão de 4 casas decimais. Compare o resultado com o valor de $\ln 2$.

12. Considere a integral : $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.
a) Estime I pela regra 1/3 de Simpson usando $h = 0.25$;
b) estime I por Quadratura Gaussiana com 2 pontos ;
(c) sabendo que o valor exato de I (usando 5 casas decimais) é 0.74682, pede-se:
c1) compare as estimativas obtidas em *(a)* e *(b)*;
c2) quantos pontos seriam necessários para que a regra dos trapézios obtivesse a mesma precisão que a estimativa obtida para I em *(b)*?

13. Calcule π da relação $\pi/4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)}$ com erro inferior a 10^{-3} pela regra 1/3 de Simpson.

14. Considere a função f tabelada nos seguintes pontos:

x	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$f(x)$	7.3069	9.8595	12.9485	16.6205	20.9224	25.9014

e o problema de se obter um valor aproximado para $I = \int_2^3 f(x)dx$.
a) Obter um valor aproximado para esta integral escolhendo entre a regra 1/3 de Simpson, Trapézios ou uma combinação das duas de modo a garantir uma boa precisão no resultado. Justifique sua escolha.
b) Obtenha o valor aproximado da integral usando quadratura Gaussiana.
c) Sabendo que: a função tabelada é: $f(x) = x^3 - ln(x)$; o valor exato da integral (com 4 casa decimais) é: 16.4167 pede-se: qual a regra de integração foi mais eficiente para obter uma aproximação para I: quadratura Gaussiana ou a fórmula empregada no item (a)? Considere nesta análise a precisão atingida e esforço computacional para obter esta precisão?