

## Lista de Exercícios 8 - MS211

\*Exercícios extraídos do Capítulo 8 do livro *Métodos Numéricos*, de Maria Cristina C. Cunha (Editora da Unicamp, 2000). Os números em **negrito** indicam a numeração do livro.

1. **(1)** Use o método de diferenças finitas para encontrar aproximações para os seguintes problemas com dados de contorno. O passo  $h$  é dado em cada caso. Em alguns itens, fornecemos a expressão da solução analítica, que poderá ser usada para conferir os resultados obtidos.

(a)  $y'' + y = 0$ ,  $x \in (0, 1)$  com condições  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 1$ .

Passo  $h = 0.1$ . Solução analítica  $y(x) = \sin x / \sin 1$ .

(b)  $y'' + y = 0$ ,  $x \in (0, 1)$  com condições  $y'(0) + y(0) = 0$  e  $y(1) = 1$ .

Passo  $h = 0.1$ .

(c)  $y'' + (x + 1)y' - 2y = (1 - x^2)e^{-x}$ ,  $x \in (0, 1)$  com condições  $y(0) = -1$  e  $y(1) = 0$ .

Passo  $h = 0.1$ . Solução analítica  $y(x) = (x - 1)e^{-x}$ .

(d)  $y'' = 100y$ ,  $x \in (0, 1)$  com condições  $y(0) = 1$  e  $y(1) = e^{-10}$ .

Passos  $h = 0.1$  e  $h = 0.05$ . Solução analítica  $y(x) = e^{-10x}$ .

2. **(2)** Escreva uma discretização com a ordem de aproximação  $\mathcal{O}(h^2)$  para a equação diferencial

$$y'' + xy' + y = 2x, \quad y(0) = 1 \text{ e } y(1) = 0.$$

Prepare o sistema de equações correspondentes a  $h = 0.1$ , elabore e execute um programa correspondente.

3. **(4)** Usando o desenvolvimento em série de Taylor até os termos de segunda ordem, encontre aproximações para a solução dos problemas de valor inicial abaixo. Compare, quando possível, seus resultados com a solução analítica.

(a)  $y' = 1/x^2 - y/x - y^2$ ,  $x > 1$  com  $y(1) = -1$ .

Passos  $h = 1/16$  e  $h = 1/32$ . Solução analítica  $y(x) = -1/x$ .

(b)  $y' = -xy + 1/y^2$ ,  $x > 1$  com  $y(1) = 1$ .

Passo  $h = 0.05$ .

4. **(5)** Encontre uma aproximação para  $y(0.1)$ , com quatro dígitos corretos, sabendo que  $y' = xy + 1$  e  $y(0) = 1$ .

5. **(7)** Considere o problema 4a.

(a) Usando um Método de Runge-Kutta de segunda ordem, encontre uma solução no intervalo  $(1, 2)$  tomando  $h = 0.1$ .

(b) Use interpolação, linear e quadrática, para encontrar valores aproximados para  $y(1.053)$  e  $y(1.555)$ .

(c) Repita (a) e (b) usando agora o Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Compare seus resultados.

6. **(8)** Um foguete de massa  $m = 0.11$  kg é lançado verticalmente com velocidade inicial  $v(0) = 8$  m/seg; o movimento é amortecido pela ação da gravidade ( $f = mg$ , com  $g = -9.8$  m/seg<sup>2</sup>) e da resistência do ar ( $f = -kv|v|$ , com  $k = 0.002$  kg/m). Pela Lei de Newton, a equação diferencial na velocidade  $v(t)$  é  $mv' = mg - kv|v|$ .

(a) Use o Método de Runge-Kutta com  $h = 0.1$  para encontrar uma aproximação para a velocidade, decorridos 5 s;

(b) Encontre o tempo para o qual o foguete atinge a altura máxima. Qual é esta altura?