MS 211 – Calculo Numérico
Lista 08

Integração numérica

Motivação

O seguinte exemplo foi retirado de [2].

O valor médio de uma corrente alternada sobre um período pode ser igual a zero. Por exemplo, suponha que a corrente é descrita pela função $i(t) = \sin(2\pi t/T)$, sendo T o período de oscilação. O valor médio para a função é determinado pela equação

$$\bar{i} = \frac{\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{T} = 0.$$

Como tal corrente é capaz de produzir trabalho e gerar calor, em geral, a corrente média é calculada como

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt} \tag{1}$$

que é chamada de *valor eficaz* para a corrente (ou *root mean square*).

Calcule o valor de I_{RMS} usando a regra do trapézio e a quadratura gaussiana para uma corrente da forma

$$i(t) = \begin{cases} 10\,e^{-t/T}\sin(2\pi t/T), & \text{se} \quad 0 \le t \le T/2 \\ 0, & \text{se} \quad T/2 \le t \le T, \end{cases}$$

considerando $T = 1\,s$.

Solução

Primeiramente note que existe uma primitiva para a função a ser integrada. Isto nem sempre está disponível, o que nos leva a mais uma aplicação da integração numérica. É interessante ressaltar, também, que às vezes nem mesmo a função está disponível, e temos que trabalhar apenas com um conjunto de dados.

Para este caso, podemos aplicar diretamente os métodos pedidos. O valor exato da integral (calculado com a expressão analítica e o Teorema Fundamental do Cálculo) é 15.41261

- Para o método do trapézio, temos os seguintes resultados, dados na Tabela 1

Tabela 1: Aproximações obtidas com a regra do trapézio

Pontos	Aproximação
2	15.16327
4	15.40143
8	15.41196
16	15.41257
32	15.41261
64	15.41261

- Para usar a quadratura gaussiana, primeiro vamos fazer uma mudança de variáveis para ajustar o intervalo, de $[0,\ 0.5]$ para $[-1,\ 1]$:

$$t = \frac{1}{4}(1+u).$$

Aplicando a quadratura gaussiana, obtemos os seguintes resultados, mostrados na Tabela 2

Tabela 2: Aproximações obtidas com a quadratura gaussiana

Pontos	Aproximação
2	11.9978243
3	15.6575502
4	15.4058023
5	15.4126391
6	15.4126109

Exercício 01

Considere a aproximação para a integral

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx \approx 0.9461.$$

Verifique que o resultado obtido usando a regra de Simpson se aproxima consideravelmente do valor exato. Qual é o erro cometido? Explique esta proximidade, fazendo uso da análise do erro.

Exercício 02

Os polinômios de Laguerre, dados por

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1\\
L_1(x) &= 1-x\\
L_2(x) &= x^2-4x+2\\
L_3(x) &= -x^3+9x^2-18x+6
\end{aligned}$$

são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle f,\ g\rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)\, dx.$$

Encontre uma fórmula de integração para $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx$ que resulte no valor exato quando $f(x)$ é um polinômio de grau até 3. Depois, use a fórmula encontrada para aproximar

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin(x)\, dx.$$

Exercício 03

Determine o número de pontos necessários para que a aproximação do valor da integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

seja menor do que 10^{-4} quando aplicados

a) A regra de Simpson;

b) A regra do trapézio.

Exercício 04

Seja $f(x)$ uma função com segunda derivada contínua em um intervalo $I = [a,\, b]$ e tal que $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,\, b)$. Mostre que, ao aproximar a integral de $f(x)$ em I usando a regra do trapézio, obtemos um valor maior do que o valor exato da integral. Represente geometricamente o resultado e dê um exemplo.

Exercício 05

Levando em consideração o número de operações realizadas, o que é possível concluir comparativamente sobre as fórmulas de Simpson repetida e gaussiana repetida?

Exercício 06

Em qual sentido é possível afirmar que a regra de Simpson é melhor do que a regra do trapézio? Justifique.

Exercício 07

Considere uma função $f(x)$ definida em um intervalo $[a,\, b]$.

a) Aproxime $f(x)$ usando um polinômio de Lagrange de grau 1, e chame-o de $p(x)$;

b) Calcule a integral de $p(x)$, aproximação para a integral de $f(x)$. Que regra foi obtida?

c) Repita os itens a) e b) usando polinômios de grau 2 e 3.

Exercício 08

Mostre que a regra do trapézio com pontos equidistantes ($h = 2\pi/(n+1)$) é exata para funções da forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos{(kx)} + b_k\, \sin\,(kx)$$

quando integradas sobre um período completo.

Exercício 09

Use a regra $1/3$ de Simpson para integrar, com o menor esforço computacional possível, a função abaixo, no intervalo $[0,\ 2]$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \in [0,\ 1]; \\ (x+2)^3, & \text{se } x \in [1,\ 2]. \end{cases}$$

Exercício 10

Usando as fórmulas repetidas dos trapézios e Simpson, aproxime as integrais abaixo, usando o número de pontos indicados. Compare com os resultados exatos e dê um limitante para o erro (se possível).

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\,dx, \quad n = 6$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin(x)\,dx, \quad n = 8$

Referências

[1] R. Burden, J. Faires, and A. Burden, *Numerical analysis*, 8 ed., 2013.

[2] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical methods for engineers*, McGraw-Hill, 1998.

[3] S. D. Conte and C. W. D. Boor, *Elementary numerical analysis: an algorithmic approach*, McGraw-Hill Higher Education, 1980.

[4] M. C. C. Cunha, *Métodos Numéricos*, Editora da Unicamp, 2000.

[5] G. Dahlquist and A. Björk, *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[6] N. B. Franco, *Cálculo numérico*, Pearson, 2006.

[7] C. B. Moler, *Numerical computing with MATLAB, electronic edition: The MathWorks*. `http://www.mathworks.com/moler/index_ncm.html`. último acesso em 28-01-2015.

[8] M. A. G. Ruggiero and V. L. d. R. Lopes, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*, Makron Books do Brasil, 1997.